

Estudi de la dinàmica d’algunes aplicacions al pla

Mireia Llorens Massana

Grup de Sistemes Dinàmics.
Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona.

Memòria presentada per a l’obtenció
del títol de doctora, dirigida pels Drs.
Armengol Gasull Embid i
Víctor Mañosa Fernández.

Bellaterra, Juliol de 2017

*Els sotasignants, els Drs. Armengol Gasull Embid
i Víctor Mañosa Fernández, certifiquem que Mireia
Llorens Massana ha realitzat aquesta tesi sota la
nostra direcció.*

El treball que tot just comenceu a llegir, és el resultat d'uns quants anys de recerca i estudi. Segurament més anys del que tocaria, però tal i com algú em va dir: "El doctorat és com un matrimoni. Saps quan comença, però no com anirà o quan s'acabarà". Com qualsevol parella, hem passat moments bons i no tant bons, però ja sabem que en una família no tot són flors i violes.

Suposo que a hores d'ara, els personatges s'entreveuen, perquè encara que parli metafòricament, el que està clar és que sense l'Armengol i el Víctor, aquesta recerca que teniu a les vostres mans no hi seria pas. Em coneixeu bé i sabeu que normalment sóc dona de poques paraules, m'agrada ser molt concisa, però això no treu que sigui agraïda.

Armengol ... gràcies pel teu suport i acompanyament durant tots aquests anys. Gràcies per fer-me veure més enllà del que tenia als ulls, per inculcar-me l'esperit d'autocrítica i de recerca.

Víctor ... gràcies també pel teu suport i acompanyament aquests darrers anys. Has estat crític i comprensiu quan ha fet falta, i m'has ajudat molt a l'hora de redactar un bon text científic.

A tots dos, que heu estat molt pacients amb mi ... moltíssimes gràcies, de tot cor.

Altrament, m'agradaria també donar les gràcies als companys de la universitat que en un moment o altre m'han ajudat, tant tècnicament com logísticament: l'Albert, la Isabel, el Joan, el Jaume, els membres de la secretaria del departament ... i tants d'altres que segurament em deixo.

Per últim, i no pas per ser els menys importants, dono les gràcies a la meva família. Als meus pares especialment, pel seu suport incondicional, per ajudar-me i animar-me en tot moment. Anàlogament, al meu marit i als meus fills, que han aguantat a més a més els meus canvis d'humor, i m'han perdonat totes les hores que no he estat al seu costat. A tots ells, moltíssimes gràcies.

Mireia.

Índex

Introducció	11
1 Dinàmica de les aplicacions birracionals integrables que preserven fibracions de gènere zero	19
1.1 Introducció	19
1.2 Resultats preliminars	20
1.2.1 Corbes racionals i parametritzacions	20
1.2.2 Parametritzacions pròpies	22
1.2.3 Corbes reals	24
1.2.4 Parametritzacions reals	25
1.2.5 Com trobar la inversa d'una parametrització pròpia?	26
1.3 Dinàmica de les fibracions de gènere zero via transformacions de Möbius	27
1.3.1 Existència de simetries de Lie i de mesures invariants	29
1.3.2 Detecció de conjugacions via les conjugacions de les transformacions de Möbius	33
1.4 La família d'aplicacions de Bastien i Rogalski	34
1.5 L'aplicació de Saito i Saitoh	43
1.6 Una equació amb diferències amb l'invariant de Saito i Saitoh	45
1.7 Les recurrències de Palladino	47
1.7.1 Simetries de Lie de les aplicacions associades a les recurrències de Palladino	48
1.7.2 Conjugacions al conjunt de les aplicacions de Palladino	49
1.7.3 Anàlisi de les recurrències de Palladino números 3 i 5	51
2 Òrbites periòdiques de les aplicacions integrables que preserven fibracions el·líptiques, mitjançant la seva estructura de grup	53
2.1 Introducció. Dinàmica sobre corbes invariants mitjançant l'estructura de grup	53
2.2 Exemple de càlcul del lloc geomètric de les òrbites periòdiques.	59
2.2.1 Aplicació de Lyness.	59

2.2.2	Aplicació de Lyness 2-periòdica.	63
2.3	Consideracions sobre l'ús de programes de computació simbòlica.	72
3	Determinació explícita de continus de punts periòdics per a aplicacions integrables racionals	77
3.1	Introducció	77
3.2	Descripció dels procediments efectius de càlcul	79
3.2.1	Condicions per a l'existència de continus d'òrbites periòdiques	79
3.2.2	La regió factible	81
3.3	Resultats preliminars	82
3.4	Aplicació de McMillan-Gumovski-Mira	84
3.4.1	Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat	85
3.4.2	Estudi de la integral primera i la regió factible per l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira	88
3.4.3	Estudi de la funció número de rotació	94
3.4.4	Anàlisi dels continus de punts 5-periòdics	96
3.5	Aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica	105
3.5.1	Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat.	106
3.6	Aplicació de Lyness	107
3.6.1	Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat.	108
3.7	Aplicació de Lyness 2-periòdica	110
3.8	Aplicació de Lyness 3-periòdica	112
3.9	Aplicació de Lyness 6-periòdica	113
3.10	Aplicació de Bastien-Rogalski	113
3.11	Aplicació de Saito i Saitoh	114
4	Sistemes dinàmics associats a transformacions de Landen	117
4.1	Introducció	117
4.2	La transformació de Gauss-Landen, la mitjana aritmètico-geomètrica i l'algorisme de Brent-Salamin	120
4.2.1	La mitjana aritmètico-geomètrica	120
4.2.2	La demostració de Gauss	122
4.2.3	La longitud de la lemniscata	125
4.2.4	L'algorisme de Brent-Salamin	126
4.3	Altres transformacions de Landen donades per mitjanes generalitzades . .	133
4.3.1	La mitjana harmònico-geomètrica	133
4.3.2	Els resultats de Carlson	133
4.4	Transformades en integrals racionals	136

4.4.1	Demostració del Teorema 4.4.1	138
4.4.2	Integrals racionals amb denominador de grau múltiple de 4 i simètric. Teorema de reducció	141
4.4.3	Funcions amb denominador de grau 4 via el Teorema de reducció	146
4.4.4	Demostració del Teorema 4.4.2	148
4.4.5	Demostració del Teorema 4.4.3	152
4.5	Una aplicació: càlcul aproximat d'integrals	158
4.5.1	Funcions racionals amb denominador de grau 6	158
4.5.2	Funcions racionals amb denominador de grau 8	159
5	Dinàmica de l'aplicació de Boros i Moll	161
5.1	Introducció	161
5.2	Dinàmica de l'aplicació G , convergència de la integral i Conjectura de Moll	162
5.3	Punts fixos i periòdics	165
5.3.1	Estudi dels punts fixos	166
5.3.2	Una metodologia general per a la determinació de punts periòdics	168
5.3.3	Estudi dels punts 2-periòdics	171
5.3.4	Estudi dels punts 3-periòdics	176
5.3.5	Codis del procediment de descart	189
5.4	Estudi de la dinàmica associada al punt de sella P_2	191
5.4.1	Dinàmica de l'aplicació G sobre la corba L_2	191
5.4.2	Estudi numèric-analític de la varietat inestable	195
6	Apèndixs	205
6.A	Zeros de famílies de polinomis en un paràmetre	205
6.B	Resultats generals de combinatòria	207
6.C	El Teorema de Poincaré-Miranda	215
6.C.1	Preliminars a \mathbb{R}	215
6.C.2	Grau topològic a \mathbb{R}^2	216
6.C.3	Grau topològic de Brouwer, o grau topològic a \mathbb{R}^n	218
6.C.4	Teorema de Poincaré-Miranda.	220
6.D	Bases de Gröbner.	223
6.D.1	Preliminars	223
6.D.2	Relació d'ordre en els monomis	224
6.D.3	Reducció de polinomis	225
6.D.4	Bases de Gröbner	227
	Bibliografia	229

Introducció

En el treball que es presenta a continuació, desenvolupem l'estudi de la dinàmica de certes aplicacions del pla, incloent l'estudi d'objectes com ara òrbites periòdiques, continus de punts periòdics, números de rotació i simetries de Lie, entre d'altres.

Els tres primers capítols tenen com a finalitat l'estudi dels objectes mencionats anteriorment per *aplicacions birracional*s amb integrals primeres racionals. Recordem que una aplicació plana racional $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, on $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^2$ és un conjunt obert i $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, s'anomena *birracional* quan posseeix una inversa racional. També diem que F és *integrable* quan existeix una aplicació $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K}$ no constant sobre conjunts oberts tal que $V(F(x, y)) = V(x, y)$, la qual s'anomena *primera integral* o *invariant de F* .

En aquests capítols considerarem només aquelles aplicacions integrables que tenen una *integral primera racional*. De fet, tots els exemples de funcions integrables birracionals que coneixem tenen integral primera racional, però fins on sabem, no hi ha cap raó en particular per afirmar que una aplicació integrable birracional sigui racionalment integrable (veure, per exemple, el cas de l'anomenada *aplicació de composició* associada a la recurrència de Lyness 5-periòdica que, en el cas que fos integrable, no tindria integral racional, [30, 34]). En definitiva, considerarem integrals primeres de l'estil

$$V(x, y) = \frac{V_1(x, y)}{V_2(x, y)}, \quad (0.0.1)$$

on assumirem que V_1 i V_2 són coprimers i que V té *grau mínim*. Val a dir que el grau d'una integral primera racional (0.0.1) és el màxim dels graus de V_1 i V_2 , i que entenem per grau mínim al fet que qualsevol altra integral primera de F té com a mínim el mateix grau. Per tant, l'aplicació preservarà les fibres de la fibració en l'obert \mathcal{U} donada per les components C_h de les corbes algebraiques

$$V_1(x, y) - hV_2(x, y) = 0, \quad h \in \text{Im}(V), \quad (0.0.2)$$

Per brevetat, en aquest treball direm que una aplicació F preserva una fibració de corbes C_h si preserva cada fibra, és a dir, si cada corba C_h és invariant sota la iteració de F . Anomenarem nivell d'energia al paràmetre h .

Qualsevol corba algebraica a $\mathbb{C}P^2$ és una superfície de Riemann caracteritzada pel seu gènere, [56, 84]. Donada una fibració invariant (0.0.2), en general, el gènere de les

components irreductibles de la fibració $\{V_1 - hV_2\}_{h \in \text{Im}(V)} \cap \mathcal{U}$ és constant excepte, potser, per a un conjunt finit de valors de $h \in \text{Im}(V)$ per als quals el gènere és menor. En aquesta situació, diem que la fibració invariant té gènere g . Seguint el criteri d'alguns autors ([39, 43, 55]), la dinàmica d'una aplicació integrable birracional a \mathbb{R}^2 es pot classificar en termes del gènere de la fibració que preserva. Així doncs:

Gènere $g \geq 2$. Qualsevol aplicació F birracional que preserva una fibració *no singular* de gènere més gran o igual que 2 és globalment periòdica. És a dir, existeix $p \in \mathbb{N}$ tal que $F^p = \text{Id}$. Aquest fet és conseqüència de dos resultats: el primer és el Teorema dels automorfismes de Hurwitz (1893) el qual, en el nostre context, ens assegura que qualsevol aplicació birracional que preserva una corba *particular* no singular de gènere $g \geq 2$ ha de ser periòdica (sobre la corba) amb un període afitat per $84(g - 1)$, [55]. El segon resultat és el Teorema de Montgomery (1937) el qual ens afirma que qualsevol homeomorfisme periòdic (punt a punt) en un espai mètric connex localment homeomorf a \mathbb{R}^n és globalment periòdic, [72]. Vegeu [32] per més detalls.

Gènere $g = 1$. Una corba algebraica de gènere 1, també anomenada corba el·líptica, té una estructura de grup associada ([56, 87, 86]). El Teorema de Jogia-Roberts-Vivaldi [55, Teorema 3], ens relaciona la dinàmica en cadascuna de les corbes invariants amb aquesta estructura de grup. Fent ús d'aquest resultat; del fet de que cada corba el·líptica *real* (afegint-hi, si cal, un nombre de punts a l'infinit del pla projectiu) es pugui veure com una o dues corbes simples tancades; i de que la suma interna es pugui representar com l'operació habitual del grup de Lie \mathbb{S}^1 o bé $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$ ([85, pàgina 420]), obtenim que donada una aplicació birracional F que preserva la corba el·líptica C_h , o bé $F|_{C_h}$ és conjugada a una rotació, o bé ho és $F|_{C_h}^2$, excepte en certs casos en els que, de fet, la dinàmica de $F|_{C_h}$ és 2,3,4 o 6-periòdica. Per més detalls, vegeu el Capítol 2.

En aquest cas, l'estudi de la dinàmica global de cadascuna d'aquestes aplicacions es redueix aleshores a l'estudi del nombre de rotació, $\theta(h)$, associat a cadascuna de les corbes invariants C_h . Desafortunadament, la funció número de rotació no té en general una expressió explícita. Tot i així, fent servir la forma normal de Weierstrass per a aquestes corbes, és possible donar una descripció de $\theta(h)$ en termes de integrals el·líptiques (veure [41] i les referències que s'hi donen). Fent servir aquesta descripció, es pot veure que $\theta(h)$ és una funció analítica a trossos per $h \in \text{Im}(V)$. Per tant, qualsevol aplicació F birracional que preservi una fibració el·líptica real $\{C_h\}$, i per la que es pugui definir la funció $\theta(h)$, és o bé una "rígida" si $\theta(h)$ és constant o, en cas contrari, hi ha un nombre infinit de possibles períodes i un conjunt dens de corbes a l'espai de fases ple d'òrbites periòdiques. En aquest darrer cas, a més, hi ha dependència sensible respecte a les condicions inicials.

La família d'aplicacions QRT, així com d'altres casos interessants des del punt de vista físic ([41]) preserven una fibració de forma (0.0.2) tals que les corbes invariants C_h tenen gènere 1 excepte per a un nombre finit de nivell d'energia. Aquesta és la raó perquè aquest cas és tan important a la literatura.

Gènere $g = 0$. En aquest cas, usant certes parametritzacions racionals de les corbes en la fibració invariant, s'obté que sobre cada corba, qualsevol aplicació birracional és conjugada a una transformació de Möbius, la dinàmica de les quals és ben coneguda (veure [25] per exemple). Com a conseqüència, sobre el domini de definició només hi poden aparèixer corbes amb òrbites periòdiques, corbes plenes amb solucions denses, així com corbes amb un o dos punts atractors i/o repulsors.

El Capítol 1, està dedicat a l'estudi de la dinàmica de les aplicacions integrables birracionals que preserven fibracions de corbes algebraiques de gènere 0. Veurem com sobre cada corba, qualsevol aplicació birracional és conjugada a una transformació de Möbius, i com podem treure profit d'aquest fet per poder fer l'estudi global de la dinàmica de certes aplicacions particulars, per les quals serem capaços de donar l'expressió *explícita* del seu nombre de rotació i del conjunt de períodes.

També hem demostrat que qualsevol aplicació integrable birracional del pla que preservi una fibració de gènere 0 posseeix una simetria de Lie i una mesura invariant, la qual cosa permet una via alternativa per a l'estudi de la dinàmica global d'aquestes aplicacions.

Els resultats exposats en aquest capítol, es troben a l'article: M. Llorens, V. Mañosa. Lie symmetries of birational maps preserving genus 0 fibrations. *J. Math. Anal. Appl.* 432 (2015), 531–549.

Al Capítol 2, ens centrarem en l'estudi de les aplicacions que preserven una fibració de corbes algebraiques $\{C_h\}$ de gènere 1. Veurem com podem treure partit de la relació que presenta el Teorema 3 de [55], entre la dinàmica d'una aplicació birracional que preserva una corba el·líptica i la seva estructura de grup, per tal de caracteritzar les corbes de la fibració que estan plenes de punts de periòdics, en termes del seu nivell d'energia.

Moltes aplicacions birracionals integrables del pla exhibeixen continus d'òrbites periòdiques, i hem vist als capítols 1 i 2 que els continus es corresponen amb determinats nivells d'energia. De fet, a part dels pocs casos d'aplicacions birracionals integrables globalment periòdiques, en un retrat de fase típic hi trobem conjunts oberts de l'espai de fases densament coberts per corbes invariants plenes d'òrbites periòdiques, totes elles del mateix període. En aquests casos el conjunt de períodes de l'aplicació és infinit i conté almenys tots els períodes a partir d'un.

Al Capítol 3, proposem una tècnica que aprofita la racionalitat de les aplicacions i la racionalitat de les integrals primeres per tal de caracteritzar sobre quines corbes C_h hi ha els continus de punts periòdics. Tot i que sovint farem servir la birracionalitat de les aplicacions i que tots els exemples que examinarem són birracionals, el mètode funciona per aplicacions racionals. Aquest mètode és purament computacional i només es basa en la hipòtesi que els continus de punts periòdics estan situats sobre corbes de nivell de la integral primera. Fins a on coneixem, el mètode és nou i en alguns exemples ens

permet millorar resultats coneguts a la literatura, com ara alguns dels que apareixen a [82] obtinguts amb eines més algebraiques. Un altre avantatge del nostre enfocament és que es pot estendre a aplicacions racionals integrables en dimensions superiors.

Per completar el capítol, aplicarem el mètode per a estudiar els continus de punts periòdics de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira. També detallarem altres exemples com l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica i d'altres que s'han tractat des de diferents punts de vista als capítols anteriors, com pot ser l'aplicació de Lyness; les aplicacions de Lyness k -periòdiques amb $k \in \{2, 3, 6\}$; i la de Bastien i Rogalski. De totes elles, trobarem les condicions necessàries per a l'existència dels continus de punts periòdics.

Els resultats dels Capítols 2 i 3, estan publicats a l'article: A. Gasull, M. Llorens, V. Mañosa. Continua of periodic points for planar integrable rational maps. *International Journal of Difference Equations*, 11 (2016), 37-63.

Seguidament, als Capítols 4 i 5 ens centrarem en estudiar la dinàmica, i en particular les òrbites periòdiques, d'un sistema dinàmic associat a una transformació de Landen per a una integral racional formada per polinomis amb termes parells, amb numerador de grau 4 i denominador de grau 6. Aquest sistema, a diferència dels que s'han treballat als capítols anteriors, ni és racional ni és integrable.

El contingut del Capítol 4 està recollit a l'article A. Gasull, M. Llorens, Càlcul d'integrals usant sistemes dinàmics discrets. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 32 (2017) 45–71. Aquest capítol serveix com a element introductori del Capítol 5, atès que és la part del treball on recollim resultats i aplicacions de les transformacions de Landen. Aquestes transformacions associen un sistema dinàmic discret a una certa família d'integrals que depenen de paràmetres, de manera que les integrals considerades són integrals primeres del sistema dinàmic discret. Usant aquesta propietat, sovint les integrals es poden calcular o aproximar estudiant els comportaments límit del sistema dinàmic.

Considerem, per exemple, per $a > 0$, $b > 0$, la integral el·líptica

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}. \quad (0.0.3)$$

Si considerem l'aplicació

$$F(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right), \quad (0.0.4)$$

aleshores tenim que

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} = I(F(a, b)). \quad (0.0.5)$$

És a dir que I és una integral primera del sistema dinàmic discret* generat per l'aplicació F . Això ens diu que tots els punts d'una òrbita de F , $\mathcal{O}_{(a_0, b_0)} := \{F^n(a_0, b_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, estan dins de la mateixa corba de nivell d' I , $I(a, b) = I(a_0, b_0)$, i també hi són els seus punts d'acumulació. Aquests darrers punts formen el que s'anomena conjunt ω -límit de l'òrbita. Notem que, F^n denota la composició de F amb si mateixa n cops, on $F^0 = \text{Id}$.

Gauss va provar l'any 1799 la igualtat (0.0.5), però un resultat més general que aquest ja havia estat demostrat per Landen, l'any 1775, veure [3, 36, 50, 60].

Hom podria pensar però, de què ens serveix fer un canvi en la integral, si ens la deixa exactament igual i, aparentment no ens ajuda per tal de trobar el seu valor? Doncs bé, el canvi sí que és interessant, donat que si està ben escollit, tal i com hem comentat abans, després d'aplicar-lo reiteradament ens permetrà de calcular la integral de manera aproximada, fent un pas al límit sota el signe de la integral. En particular, recuperarem el resultat clàssic:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{MAG}(a, b)}, \quad (0.0.6)$$

on $\text{MAG}(a, b)$ denota la mitjana aritmètico-geomètrica dels nombres a i b (els detalls d'aquest resultat estan desenvolupats al Capítol 4). Altrament, també aplicarem la invariància de la integral $I(a, b)$ per l'aplicació F i la relació (0.0.6), per a calcular la longitud de la lemniscata i presentar l'algorisme de Brent-Salamin per al càlcul amb velocitat quadràtica del nombre π .

En aquest mateix capítol, obtindrem també altres transformacions de Landen donades per algunes mitjanes generalitzades i, seguint [16, 17, 23, 64, 70], estudiarem diverses transformacions de Landen que ens permetran calcular certes integrals definides impròpies donades per funcions racionals.

Un dels exemples que considerarem és la integral racional formada per polinomis amb termes parells, amb numerador de grau 4 i denominador de grau 6,

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx. \quad (0.0.7)$$

*Si l'aplicació F no és invertible, hauríem de parlar més pròpiament de semi-sistemes dinàmics discrets, però com es fa sovint, ometrem el prefixe "semi".

Al Teorema 4.4.2 del capítol 4 demostrarem, el resultat ja conegut, que ens diu que el sistema dinàmic discret definit per

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{5a_n + 5b_n + a_nb_n + 9}{(a_n + b_n + 2)^{4/3}}, \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + 6}{(a_n + b_n + 2)^{2/3}}, \\ c_{n+1} = \frac{d_n + e_n + c_n}{(a_n + b_n + 2)^{2/3}}, \\ d_{n+1} = \frac{(b_n + 3)c_n + (a_n + 3)e_n + 2d_n}{a_n + b_n + 2}, \\ e_{n+1} = \frac{c_n + e_n}{(a_n + b_n + 2)^{1/3}}, \end{array} \right. \quad (0.0.8)$$

deixa invariant la integral (0.0.7).

El sistema (0.0.8) va ser obtingut com a transformació de Landen associada a la integral (0.0.7) per G. Boros i V. Moll a [16] (vegeu també [17]). Observem que el sistema conté dos subsistemes desacoblats. Tal i com demostren M. Chamberland i V. Moll a [23] (vegeu també [16]) la convergència de la integral (0.0.7) està relacionada amb la dinàmica del subsistema definit per l'aplicació G donada per l'expressió

$$G(a, b) := \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}}, \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} \right). \quad (0.0.9)$$

A les referències [16, 23] trobem un primer estudi de la dinàmica global de l'aplicació G , i el retrat de fase d'una òrbita de G apareix a la portada del número 49 del Notices of the AMS que conté l'article [69]. El nostre objectiu és aprofundir en l'estudi de la dinàmica global d'aquesta aplicació. Observem que a diferència de la resta d'aplicacions al pla considerades en aquesta tesi, no disposem d'una integral primera per G . Aquest estudi és el que desenvoluparem al Capítol 5.

En aquest darrer capítol, començarem donant una primera descripció de la dinàmica de l'aplicació G i de les diferents regions invariants que presenta. També veurem la relació entre la dinàmica de l'aplicació i la convergència de la integral (0.0.7).

Als següents apartats, estudiarem alguns aspectes de la dinàmica de l'aplicació com ara l'existència de punts fixos i periòdics de període 2 i 3. El nostre objectiu és provar l'existència de punts periòdics per veure que una conjectura proposada a [71, Conjectura 15.6.3 pàgina 442] no és certa (consultar la pàgina 162 per més detalls), i a la vegada desenvolupar una metodologia que pugui ser aplicable a l'estudi dels punts periòdics

d'altres sistemes dinàmics discrets. Aquesta metodologia consisteix en: convertir la caracterització dels punts periòdics en un problema algebraic; la combinació d'un algorisme basat en el mètode de Sturm per isolar totes les arrels reals d'un polinomi d'una variable i d'un procediment de descart de possibles solucions per a sistemes d'equacions polinòmiques; i en l'aplicació del Teorema de Poincaré-Miranda [67, 78]. Aquest teorema és una extensió del Teorema de Bolzano a dimensió n , i potser no és tant conegut com mereixeria.

Finalment, farem un estudi numèric-analític que mostrarà evidències de l'existència de comportaments homoclínics associats a un dels punts fixos de l'aplicació G i de punts a la intersecció de la varietat inestable d'aquest punt fix i el conjunt de no-definició del semi-sistema dinàmic definit per G .

Els resultats exposats en aquest Capítol s'estan redactant per a una publicació futura.

La memòria acaba amb quatre apèndixs dedicats a aprofundir en alguns aspectes relatius a zeros de famílies de polinomis, un resultat de combinatòria, el Teorema de Poincaré-Miranda i les bases de Gröbner.

Agraïment. La darrera part d'aquesta tesi s'ha realitzat comptant amb l'ajut del Ministeri d'Economia, Indústria i Competitivitat a través del projecte MINECO/FEDER DPI2016-77407-P (AEI/FEDER, UE).

Capítol 1

Dinàmica de les aplicacions birracionals integrables que preserven fibracions de gènere zero

1.1 Introducció

Una aplicació plana racional $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, on $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{K}^2$ és un conjunt obert i $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ s'anomena *birracional* quan posseeix una inversa racional. També diem que F és *integrable* quan existeix una aplicació $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{K}$ no constant sobre conjunts oberts i tal que $V(F(x, y)) = V(x, y)$, la qual s'anomena *primera integral* o *invariant de F* . Si una aplicació F posseeix una integral primera V , aleshores cada òrbita de F es troba en algun conjunt de nivell de F , en altres paraules, els conjunts de nivell (o també anomenades corbes de nivell) són invariants sota l'aplicació F .

En aquest capítol considerarem només aquelles aplicacions integrables que tenen una *integral primera racional*. És a dir, considerarem integrals primeres de l'estil

$$V(x, y) = \frac{V_1(x, y)}{V_2(x, y)}, \quad (1.1.1)$$

on assumirem que V_1 i V_2 són coprimers i que V té *grau mínim*, encara que això últim no és essencial per al nostre estudi. Val a dir que el grau de la integral primera (1.1.1) és el màxim dels graus de V_1 i V_2 , i que entenem per grau mínim al fet que qualsevol altre integral primera de F té com a mínim el mateix grau. Per tant, l'aplicació preservarà la fibració en l'obert \mathcal{U} donada per les components C_h de les corbes algebraïques

$$V_1(x, y) - hV_2(x, y) = 0, \quad h \in \text{Im}(V). \quad (1.1.2)$$

Direm que una aplicació F preserva una fibració de corbes C_h , si cada corba C_h és invariant sota la iteració de F . Anomenem el paràmetre h com el nivell d'energia.

En aquest context, i per simplificar, direm *integrable* per referir-nos a una aplicació *racionalment integrable*.

Qualsevol corba algebraica a \mathbb{CP}^2 és una superfície de Riemann caracteritzada pel seu gènere, [56, 84]. En general, donada una fibració invariant (1.1.2), el gènere de les components irreductibles de la fibració $\{V_1 - hV_2\}_{h \in \text{Im}(V)} \cap \mathcal{U}$ és constant excepte, potser, per a un conjunt finit de valors de $h \in \text{Im}(V)$ per als quals el gènere és menor. En aquesta situació, diem que la fibració invariant té gènere g .

Com hem vist a la introducció, segons el criteri d'alguns autors ([39, 43, 55]), podem donar una primera classificació per a les aplicacions integrables birracionals de \mathbb{R}^2 segons el gènere de la fibració que preserven. En aquest capítol ens centrem en el cas en que les fibracions tenen gènere $g = 0$. Tal i com veurem a la secció següent, usant certes parametritzacions racionals de les corbes en la fibració invariant, obtindrem que sobre cada corba, qualsevol aplicació birracional és conjugada a una transformació de Möbius, la dinàmica de les quals és ben coneguda (veure [25] per exemple). Com a conseqüència, a priori, sobre el domini de definició només hi poden aparèixer corbes amb òrbites periòdiques, corbes plenes amb solucions denses, així com corbes amb un o dos punts atractors i/o repulsors.

Fent ús del resultat mencionat anteriorment, serem capaços d'estudiar la dinàmica global de certs exemples particulars, tot donant l'expressió *explícita* del número de rotació associat a aquestes aplicacions i estudiant el seu conjunt de períodes.

A la vegada, provarem que qualsevol d'aquestes aplicacions té associada una simetria de Lie i una mesura invariant.

Els resultats principals del capítol es troben a la Secció 1.3 i les següents seccions es dediquen a l'estudi de diversos exemples. Primerament, i per completesa, incloem una secció preliminar amb certs resultats sobre corbes racionals que farem servir al llarg del capítol.

1.2 Resultats preliminars

En els següents apartats repassarem totes aquelles eines necessàries per a tenir un bon coneixement sobre parametritzacions de corbes de gènere 0. En tot el nostre estudi, \mathbb{K} serà un cos algebraicament tancat de característica zero. Tots els resultats exposats estan extrets i demostrats a [84], on el lector pot aprofundir més en el tema.

1.2.1 Corbes racionals i parametritzacions

Hi ha certes corbes planes algebraiques que es poden expressar mitjançant parametritzacions racionals, és a dir, mitjançant parells de funcions racionals les quals representen tots els punts de la corba, excepte en un nombre finit de punts. Per exemple, la paràbola

$y = x^2$ es pot descriure usant el conjunt de punts $\{(t, t^2) | t \in K\}$ i, en aquest cas, tots els punts afins de la paràbola estan donats per la parametrització (t, t^2) .

Definició 1.2.1. Una corba afí C a $\mathbb{A}^2(K)$ definida per un polinomi lliure de quadrats* $f(x, y)$ és *racional* (o *parametritzable*) si hi ha funcions racionals $\chi_1(t), \chi_2(t) \in K(t)$ tals que:

1. per quasi tot $t_0 \in K$, $(\chi_1(t_0), \chi_2(t_0))$ és un punt sobre C , i
2. per quasi tot punt $(x_0, y_0) \in C$ existeix un $t_0 \in K$ de manera que $(x_0, y_0) = (\chi_1(t_0), \chi_2(t_0))$.

En aquest cas $(\chi_1(t), \chi_2(t))$ s'anomena *parametrització (afí racional)* de C .

Diem també que la parametrització $(\chi_1(t), \chi_2(t))$ està donada en *forma reduïda* si cadascuna de les funcions racionals $\chi_1(t), \chi_2(t)$ ho estan, és a dir, si per $i = 1, 2$, el màxim comú divisor del numerador i del denominador de χ_i és trivial.

Si C és una corba racional afí, i $P(t)$ és una parametrització racional afí de C sobre \mathbb{K} , escriurem les seves components com

$$P(t) = \left(\frac{\chi_{11}(t)}{\chi_{12}(t)}, \frac{\chi_{21}(t)}{\chi_{22}(t)} \right),$$

on $\chi_{ij}(t) \in K[t]$ i el $\gcd(\chi_{1i}, \chi_{2i}) = 1$, o també

$$P(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t)),$$

on $\chi_i(t) \in K(t)$.

Definició 1.2.2. Una corba projectiva C a $\mathbb{P}^2(K)$ definida per un polinomi homogeni lliure de quadrats $F(x, y, z)$ és *racional* (o *parametritzable*) si hi ha polinomis $\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t) \in K(t)$, amb $\gcd(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = 1$ tals que:

1. per quasi tot $t_0 \in K$, $[\chi_1(t_0) : \chi_2(t_0) : \chi_3(t_0)]$ és un punt sobre C , i
2. per quasi tot punt $[x_0 : y_0 : z_0] \in C$ existeix un $t_0 \in K$ de manera que $[x_0 : y_0 : z_0] = [\chi_1(t_0) : \chi_2(t_0) : \chi_3(t_0)]$.

En aquest cas $[\chi_1(t), \chi_2(t), \chi_3(t)]$ s'anomena *parametrització racional projectiva* de C .

A vegades, però, ens és més útil aplicar caracteritzacions del concepte de corba racional com la que es dona al resultat següent, que no pas la Definició 1.2.1 que acabem de donar. Per exemple:

*Un polinomi és lliure de quadrats quan no té factors múltiples.

Teorema 1.2.3. *Una corba irreductible C , definida per $f(x, y)$ és racional si i només si existeixen funcions racionals $\chi_1(t), \chi_2(t) \in K(t)$, no constants a la vegada, de manera que $f(\chi_1(t), \chi_2(t)) = 0$. En aquest cas, diem que $(\chi_1(t), \chi_2(t))$ és una parametrització racional de C .*

També és interessant ressaltar el següent resultat:

Teorema 1.2.4. *Qualsevol corba racional és irreductible.*

Les definicions que acabem de donar són les generals per les corbes afins i les projectives, ara bé, com veurem, no totes les corbes són parametritzables. A continuació veurem un resultat que afirma que les corbes racionals són precisament aquelles tals que el seu gènere és 0. Ara bé què entenem per *gènere d'una corba*?

Sabem que, com a conjunt del pla projectiu $\mathbb{P}^2(K)$, una corba complexa projectiva

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(K) \mid P(x, y, z) = 0\}$$

és una superfície. De fet, topològicament, és una esfera amb g nanses i, aquest nombre g és el que anomenem el *gènere de la corba*. A [56] es demostra que existeix una relació entre aquest gènere i el *grau d de la corba*, entenent-lo com el grau del polinomi, la qual ve donada per:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \frac{m_p(m_p-1)}{2},$$

on m_p és la multiplicitat de qualsevol punt singular ordinari de la superfície C .

Tenint en compte que el gènere és invariant sota l'aplicació de transformacions birracionals (veure la totalitat de la demostració a [84]), podem enunciar el següent teorema.

Teorema 1.2.5. *Si una corba algebraica C és racional aleshores el seu gènere val zero.*

Encara més, el teorema de *Cayley-Riemann* ens dona la implicació recíproca:

Teorema 1.2.6. *[1] $g=0$ si i només si la corba C té una parametrització racional.*

Tots els teoremes enunciats en aquest apartat ens ajudaran a identificar quan una corba és o no racional.

1.2.2 Parametritzacions pròpies

Tot i que la representació implícita d'una corba plana és única, sense tenir en compte la multiplicació d'ella mateixa per constants no nul·les, hi ha infinites parametritzacions de la mateixa corba racional. Per exemple, per cada $i \in \mathbb{N}$, (t^i, t^{2i}) parametritza la paràbola $y = x^2$. Sí que és cert, que (t, t^2) és la parametrització de grau més baix de la família abans esmentada i, que aquesta genera cada punt de la paràbola una vegada. Parametritzacions com aquestes són les que reben el nom de parametritzacions pròpies. Més concretament:

Definició 1.2.7. Una parametrització afí $P(t)$ d'una corba racional C és *pròpia* si l'aplicació

$$\begin{aligned} P : \mathbb{A}^1(K) &\longrightarrow C \\ t &\longrightarrow P(t) \end{aligned}$$

és birracional, o equivalentment, si almenys cada punt sobre C està generat exactament per un valor del paràmetre t .

Definim la *inversió* d'una parametrització pròpia $P(t)$ com la aplicació inversa racional de P , la qual denotem com P^{-1} .

Lema 1.2.8. *Qualsevol corba racional es pot parametritzar pròpiament.*

A continuació donem una caracterització de les parametritzacions pròpies en termes del grau corresponent a la corba racional. Per enunciar el resultat, ens farà falta introduir abans la noció del grau d'una parametrització.

Definició 1.2.9. Sigui $\chi(t) \in K$ una aplicació racional en forma reduïda. Si $\chi(t)$ no és zero, el *grau de* $\chi(t)$ és el màxim dels graus del numerador i del denominador de $\chi(t)$. Si $\chi(t)$ és zero, el grau és defineix com a -1 . Denotem el grau de $\chi(t)$ com $\deg(\chi(t))$ i anomenem *lineals* a les funcions racionals de grau 1.

Definició 1.2.10. Definim el *grau d'una parametrització afí racional* $P(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t))$ com el màxim dels graus de les seves components racionals, és a dir,

$$\deg(P(t)) = \max\{\deg(\chi_1(t)), \deg(\chi_2(t))\}.$$

Gràcies a aquestes definicions, podem enunciar el resultat que caracteritza el fet de que una parametrització sigui pròpia en funció del grau de l'equació implícita de la corba.

Teorema 1.2.11. *Sigui C una corba afí racional definida sobre K mitjançant el polinomi $f(x, y) \in K[x, y]$, i sigui $P(t) = (\chi_1(t), \chi_2(t))$ una parametrització de C . Aleshores $P(t)$ és pròpia si i només si*

$$\deg(P(t)) = \max\{\deg_x(f), \deg_y(f)\}.$$

Encara més, si $P(t)$ és pròpia i $\chi_1(t)$ no és zero, aleshores $\deg(\chi_1(t)) = \deg_y(f)$ i, de manera similar, si $\chi_2(t)$ no és zero, aleshores $\deg(\chi_2(t)) = \deg_x(f)$.

1.2.3 Corbes reals

Fins ara hem definit i detallat certs resultats sobre les parametritzacions d'una corba plana algebraica. Ara bé, de cara a a demostrar alguns dels resultat que es donen en aquest capítol, referits a fibracions de corbes racionals a \mathbb{R}^2 , ens interessaria treballar amb parametritzacions que fossin pròpies i reals.

Definició 1.2.12. Una *corba plana real afí* és una corba plana afí sobre \mathbb{C} amb infinits punts al pla afí sobre \mathbb{R} .

Val a dir que les corbes reals, no tenen perquè estar necessàriament definides per polinomis reals. Per exemple, el polinomi $f(x, y) = x^2 + ixy \in \mathbb{C}[x, y]$ defineix una corba real (segons la definició que acabem de donar), donat que tots els punts $(0, b)$ amb $b \in \mathbb{R}$, són sobre la corba. El què passa en aquest exemple, és que la nostra corba es descomposa com a dues corbes a \mathbb{C} , la recta real definida per $x = 0$ i, la complexa definida per $x + iy = 0$. Per altra banda, els polinomis reals no han de definir necessàriament corbes reals, com per exemple $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \in \mathbb{R}[x, y]$. Tot i així, els resultats donats a [84] ens diuen que si la corba és real i irreductible sobre \mathbb{C} (és a dir, que el polinomi que la defineix és irreductible com a polinomi en $\mathbb{C}[x, y]$), aleshores la nostra corba es podrà expressar mitjançant un polinomi real. Vegem-ho:

Lema 1.2.13. *Qualsevol corba real irreductible té un polinomi real que la defineix.*

Demostració. Clarament, la línia a l'infinit té un polinomi real que la defineix, per tant, considerarem la nostra corba C diferent d'aquesta línia a l'infinit. Prendrem $f(x, y) = f_1(x, y) + if_2(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, amb $f_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, $i = 1, 2$ el polinomi que la defineix en la versió afí.

Si apliquem la Definició 1.2.12, han d'existir infinits punts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $f_1(a, b) + if_2(a, b) = 0$, és a dir, tals que $f_1(a, b) = f_2(a, b) = 0$. Per tant, les corbes definides sobre \mathbb{C} per f_1 i per f_2 tenen infinits punts en comú i, pel teorema de Bézout, han de tenir una component comuna que anomenem $g = \gcd(f_1, f_2) \in \mathbb{R}[x, y]$. Així doncs, $f(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y)$.

Ara bé, per hipòtesi, $f(x, y)$ era irreductible sobre \mathbb{C} , això implica que $h(x, y)$ ha de ser constant i per tant, $g(x, y)$ és un polinomi real definit sobre \mathbb{C} . ■

Observació 1.2.14. Fixem-nos doncs que una corba plana sobre \mathbb{C} és real si i només si almenys una de les seves components és real.

Tenint en compte com són les corbes reals, ara ens interessaria caracteritzar com són aquelles corbes reals que a la vegada són irreductibles.

Lema 1.2.15. *Una corba real C és irreductible si i només si està definida per un polinomi real irreductible sobre \mathbb{R} .*

Demostració. La idea de la demostració segueix del Lema 1.2.13, tot tenint en compte que un polinomi real irreductible a \mathbb{R} amb infinites arrels reals és irreductible a $\mathbb{C}[x, y]$ (veure [84] per més detalls). ■

D'ara en endavant, assumim doncs que les corbes reals amb les que treballarem seran irreductibles i que estan definides per polinomis irreductibles. Si estudiem la racionalitat de les mateixes (tenint en compte que una corba real es pot pensar com una corba a \mathbb{C}) pel teorema de Cayley-Riemann, sabem que una corba real es pot parametritzar si i només si el seu gènere és zero. Aquesta caracterització ens assegura que les corbes reals amb gènere zero es poden parametritzar sobre \mathbb{C} , és a dir, en termes de funcions racionals amb coeficients complexos. A la pràctica, però, estarem més interessats en la possibilitat de parametritzar les nostres corbes reals sobre \mathbb{R} .

Teorema 1.2.16. [84, Teorema 7.6] *Totes les corbes racionals reals es poden parametritzar sobre els reals.*

Per portar a terme realment el procés de parametrització tenim diverses opcions: l'algoritme de parametrització òptima, el de parametrització per adjunts... tots ells detallats a les seccions 4.7, 4.8 i 5.3 de [84]. Vegem una d'aquestes opcions a la secció següent:

1.2.4 Parametritzacions reals

A la Secció 1.2.3 hem donat les eines per decidir quan una corba plana algebraica, donada per la seva equació implícita, és real. En aquesta secció, considerarem una parametrització racional amb coeficients complexos d'una corba plana C i, estudiarem el problema de decidir quan defineix una corba real. Més encara, si la corba és real, ens interessarà trobar una nova parametrització que transformi l'original en una de real.

Parametritzacions mitjançant rectes

Tal i com hem comentat a l'apartat anterior, existeixen diferents algorismes mitjançant els quals podem parametritzar les corbes racionals sobre els reals. En aquesta secció donarem el mètode de parametrització d'una cònica, el qual farem servir en el nostre estudi i que parametritzarà implícitament la nostra corba mitjançant corbes algebraiques de manera senzilla i intuïtiva. La idea és considerar un feix de rectes que depenen racionalment del paràmetre que volem introduir, i que passen per un punt adequat de la corba. La parametrització s'obté calculant la intersecció de cadascuna de les rectes amb la corba.

Tot recordant que només les corbes irreductibles poden ser racionals (veure Teorema 1.2.4), donem doncs el mètode a seguir:

Sigui C una cònica irreductible definida per un polinomi quadràtic

$$f(x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0(x, y),$$

on $f_i(x, y)$ són homogènies de grau i . Sense pèrdua de generalitat, assumim que C passa per l'origen, per tant $f_0(x, y) = 0$. Sigui $H(t)$ el sistema lineal format per totes aquelles rectes que passen per l'origen, de les quals en considerem una qualsevol

$$h(x, y, t) = y - tx.$$

A continuació, calculem els punts intersecció d'un element genèric de $H(t)$ amb C . És a dir, busquem la solució del sistema

$$\begin{cases} y = tx \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

respecte les variables x, y . La solució és:

$$O = (0, 0) \quad i \quad Q(t) = \left(-\frac{f_1(1, t)}{f_2(1, t)}, -t \frac{f_1(1, t)}{f_2(1, t)} \right).$$

Fixem-nos que $f_1(x, y)$ no és idènticament zero, donat que C és una corba irreductible. Per tant, Q depèn del paràmetre t . Més encara, $f(Q(t)) = 0$, per tant pel Teorema 1.2.3 $Q(t)$ és una parametrització de C . Tenim doncs:

Teorema 1.2.17. *La cònica afí irreductible C definida pel polinomi $f(x, y) = f_2(x, y) + f_1(x, y) + f_0(x, y)$ (on f_i és respectivament una forma de grau i), té la parametrització racional afí*

$$P(t) = \left(-\frac{f_1(1, t)}{f_2(1, t)}, -t \frac{f_1(1, t)}{f_2(1, t)} \right).$$

Corol·lari 1.2.18. *Tota cònica irreductible és racional.*

Per tant, gràcies al teorema anterior i després d'un canvi de coordenades adequat, obtenim una parametrització de la cònica irreductible C .

1.2.5 Com trobar la inversa d'una parametrització pròpia?

A la Secció 1.2.2 hem comentat per sobre l'existència de la inversa d'una parametrització pròpia, però no n'hem donat l'expressió. A continuació, expliquem com trobar-la, tot basant-nos en el mètode de càlcul del màxim comú divisor sobre el camp de les funcions

de la corba (per aprofundir en el tema, es pot consultar [84]). Considerem doncs $P(t)$ una parametrització afí racional sobre \mathbb{K} definida com

$$P(t) = \left(\frac{\chi_{11}(t)}{\chi_{12}(t)}, \frac{\chi_{21}(t)}{\chi_{22}(t)} \right),$$

on $\chi_{ij}(t) \in \mathbb{K}[t]$ i $\gcd(\chi_{1i}, \chi_{2i}) = 1$. A la vegada, també considerem els següents polinomis associats:

$$H_1(t, x) = x \cdot \chi_{12}(t) - \chi_{11}(t), \quad H_2(t, y) = y \cdot \chi_{22}(t) - \chi_{21}(t)$$

els quals jugaran un paper molt important en el problema que estem tractant. Fixem-nos que $\mathbb{K}(C)[t]$ (els polinomis amb coeficients al cos de funcions racionals sobre C) és un domini Euclidià i sabem com calcular-hi el màxim comú divisor. Més concretament, amb aquests resultats i el teorema següent podrem calcular la inversa d'una parametrització $P(t)$.

Teorema 1.2.19. [84, Teorema 4.37] *Sigui $P(t)$ una parametrització pròpia en forma reduïda amb components no constants d'una corba racional C . Sigui $H_1(t, x), H_2(t, y)$ els polinomis anteriorment definits a $\mathbb{K}(C)[t]$. Aleshores,*

$$\deg_t(\gcd_{\mathbb{K}(C)[t]}(H_1, H_2)) = 1.$$

Més encara, l'arrel simple d'aquest màxim comú divisor és la inversa de P .

Aleshores, com acabem calculant la inversa? Primer de tot, determinem el màxim comú divisor $M(x, y, t) = \gcd_{\mathbb{K}(C)[t]}(H_1, H_2)$, el qual és lineal en el paràmetre t , segons el que ens acaba d'afirmar el teorema anterior. Per tant, anomenem-lo $M(x, y, t) = D_1(x, y) \cdot t - D_0(x, y)$ i retornem la inversa com a

$$P^{-1}(t) = \frac{D_0(x, y)}{D_1(x, y)}.$$

1.3 Dinàmica de les fibracions de gènere zero via transformacions de Möbius

En el següent apartat, considerarem una aplicació integrable racional F definida en un conjunt obert del domini de definició del sistema dinàmic, el qual anomenarem *conjunt de bona definició*, $\mathcal{G}(F) \subset \mathbb{K}^2$. Assumirem, també, que existeix un conjunt $\mathcal{H} \subset \text{Im}(V) \subset \mathbb{K}$ de manera que el conjunt $\mathcal{U} := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2: V(x, y) \in \mathcal{H}\} \cap \mathcal{G}(F)$ és un subconjunt no buit de \mathbb{K}^2 , i que cada corba $C_h := \{V_1(x, y) - hV_2(x, y) = 0\}$ és irreductible a \mathbb{C} , té gènere 0, i és invariant per F .

Per descomptat una corba racional no té una única parametrització racional (tal i com s'ha comentat en els apartats anteriors). De totes maneres, podem obtenir una parametrització *pròpia*, és a dir una parametrització P tal que P^{-1} és també racional. En altres paraules, sempre podem trobar una parametrització birracional d'una corba C de gènere 0, la qual és única mòdul transformacions de Möbius, [84, Lemma 4.13].

Observem també, que fent ús de les coordenades homogènies, podem estendre a $\mathbb{K}P^2$ qualsevol aplicació birracional F , i qualsevol corba algebraica C definida a \mathbb{K}^2 . Denotarem \tilde{F} i \tilde{C} les extensions de F i C a $\mathbb{K}P^2$, respectivament. L'aplicació \tilde{F} serà polinòmica.

La nostra eina principal, és el següent resultat:

Proposició 1.3.1. *Sigui F una aplicació birracional definida en un obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}^2$, que preserva la fibració donada per les corbes algebraiques reals $\{\tilde{C}_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ de gènere 0, on \mathcal{H} és un obert de \mathbb{K} . Aleshores, per cada $h \in \mathcal{H}$, $\tilde{F}_{\tilde{C}_h}$ és conjugada a una transformació de Möbius a $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.*

Demostració. Sigui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Del fet que \tilde{C}_h és una corba de gènere 0, pel Teorema de Cayley-Riemann hi ha una parametrització racional de \tilde{C}_h , $P : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{C}_h \subset \mathbb{C}P^2$. Aquesta parametrització es pot escollir de manera que sigui pròpia, és a dir P^{-1} també racional. Conseqüentment, l'aplicació $\tilde{M} = P^{-1} \circ \tilde{F} \circ P : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, és una aplicació birracional complexa unidimensional, és a dir, una transformació de Möbius. ■

Considerem ara, el cas en què $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, també sabem pel Teorema 1.2.16 i pel Lema 1.2.8, que cada corba real racional es pot parametritzar pròpiament sobre els reals, aleshores les aplicacions birracionals que preserven una fibració de corbes algebraiques reals de gènere 0 es poden representar per transformacions de Möbius *reals*.

Corol·lari 1.3.2. *Sigui F una aplicació birracional definida en un conjunt obert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, que preserva la fibració donada per les corbes algebraiques $\{C_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ de gènere 0, on \mathcal{H} és un conjunt obert de \mathbb{R} . Aleshores per cada $h \in \mathcal{H}$, F_{C_h} és conjugada a una transformació real de Möbius a $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

La dinàmica de les transformacions de Möbius a $\hat{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, on $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ és ben coneguda (veure, per exemple, [25, Secció 2.2]), i es pot resumir en la següent proposició.

Proposició 1.3.3. *Considerem l'aplicació $M(t) = (at + b)/(ct + d)$, on $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, amb $c \neq 0$, definida per $t \in \hat{\mathbb{K}}$. Sigui $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$, i $\xi = (a+d+\sqrt{\Delta})/(a+d-\sqrt{\Delta})$.*

(a) *Si $\Delta \neq 0$, aleshores hi ha dos punts fixos t_0 i t_1 a $\hat{\mathbb{K}}$, encara més*

(a₁) *Quan $|\xi| \neq 1$, un dels punts fixos, sigui t_j , és un atractor de M a $\hat{\mathbb{K}} \setminus \{t_{j+1 \pmod{2}}\}$.*

(a₂) Quan $|\xi| = 1$, aleshores M és conjugada a una rotació a $\widehat{\mathbb{K}}$ amb nombre de rotació $\theta := \arg(\xi) \pmod{2\pi}$. En particular, M és periòdica amb període mínim p si i només si ξ és una arrel p -èsima primitiva de la unitat. Encara més, $W(t) = |(t - t_0)/(t - t_1)|$ és una integral primera de M .

(b) Si $\Delta = 0$, aleshores hi ha un únic punt fix t_0 el qual és atractor global a $\widehat{\mathbb{K}}$ de M .

En conseqüència, per aplicacions integrables birracionals que preserven una fibració donada per corbes de gènere 0, a priori, només poden aparèixer corbes amb òrbites periòdiques de període arbitràriament gran, corbes plenes amb solucions denses, o bé corbes amb un o dos punts atractors i/o repulsors, els quals es poden localitzar o bé al pla afí, o bé a la recta de l'infinit de l'espai projectiu $\mathbb{K}P^2$ (veure per exemple el cas estudiat a la Proposició 1.4.2).

1.3.1 Existència de simetries de Lie i de mesures invariants

Un dels objectes que podem associar a una aplicació integrable birracional que preserva una fibració de gènere 0 són les *simetries de Lie* i les *mesures invariants*. Formalment, una simetria de Lie d'una aplicació F definida en un conjunt obert \mathcal{U} és un camp vectorial X , també definit a \mathcal{U} , tal que per qualsevol $p \in \mathcal{U}$ es satisfà la següent equació de compatibilitat

$$X(F(p)) = DF(p) X(p), \quad (1.3.1)$$

vegeu [27, 53]. Des d'un punt de vista dinàmic, si F es una aplicació integrable amb primera integral V , i per tant, preservant la fibració associada $\{C_h\}$, una simetria de Lie de F és un camp vectorial X amb la mateixa integral primera V , de manera que l'aplicació F es pot veure com el flux φ d'aquest camp vectorial en un cert temps $\tau(h)$, el qual només depèn sobre cadascuna de les corbes invariants C_h , és a dir: $F(p) = \varphi(\tau(h), p)$ per tot $p \in C_h \cap \mathcal{G}(F)$.

Provarem que aquests camps vectorials sempre existeixen per a les aplicacions que preserven fibracions de gènere 0 i, a més a més, un d'ells es pot explicitar constructivament usant una família de parametritzacions de les corbes invariants.

Teorema 1.3.4. *Qualsevol aplicació birracional F amb integral primera racional V , que preserva una fibració de gènere 0 donada per $\{V = h\}_{h \in \mathcal{H}}$, té una simetria de Lie. Encara més, si $\{P_h(t)\}_{h \in \mathcal{H}}$ és una família de parametritzacions pròpies de $\{V = h\}_{h \in \mathcal{H}}$, aleshores existeix una simetria de Lie de F a \mathcal{U} donada per*

$$X(x, y) = DP_h(P_h^{-1}(x, y)) \cdot Y_h(P_h^{-1}(x, y))|_{h=V(x, y)} \quad (1.3.2)$$

on

$$Y_h(t) = (-b(h) + (d(h) - a(h))t + c(h)t^2) \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.3.3)$$

i les funcions a, b, c i d venen definides pels coeficients de l'aplicació

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ F \circ P_h(t) = \frac{a(h)t + b(h)}{c(h)t + d(h)}.$$

Fent ús de la fórmula donada a l'Equació (1.3.2), a la següent secció obtindrem la simetria de Lie explícita d'alguns exemples particulars d'aplicacions birracionals. Vegeu, per exemple, la prova de la Proposició 1.4.2, el Corol·lari 1.5.2, o la Secció 1.7.1. Abans de provar, però, el Teorema 1.3.4, presentarem el següent resultat preliminar:

Lema 1.3.5. *Una aplicació de Möbius $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ donada per*

$$M(t) = \frac{at + b}{ct + d},$$

admet la simetria de Lie donada pel següent camp vectorial $Y(t) = (-b + (d - a)t + ct^2) \frac{\partial}{\partial t}$.

La demostració del Lema anterior és senzilla. Nosaltres, hem obtingut el camp vectorial Y constructivament, tot buscant-ne un de polinòmic, però per provar el resultat n'hi ha prou amb comprovar que satisfà la condició de l'equació de compatibilitat $Y(M(t)) = M'(t)Y(t)$.

Prova del Teorema 1.3.4. De la Proposició 1.3.1 tenim que per cada corba C_h l'aplicació $F|_{C_h}$ és conjugada a la transformació de Möbius

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ F|_{C_h} \circ P_h(t) = \frac{a(h)t + b(h)}{c(h)t + d(h)}. \quad (1.3.4)$$

Pel Lema 1.3.5, l'aplicació M_h admet una simetria de Lie Y_h donada per (1.3.3). Aleshores, prenent la diferencial de cadascuna de les parametritzacions $P_h(t)$ aconseguim per cada $(x, y) \in C_h \cap \mathcal{G}(F)$:

$$X(x, y) = DP_h(t)Y_h(t) \Big|_{\substack{t = P_h^{-1}(x, y) \\ h = V(x, y)}} = DP_h(P_h^{-1}(x, y))Y_h(P_h^{-1}(x, y)) \Big|_{h = V(x, y)}.$$

Observem que per construcció, X és un camp vectorial tangent a cadascuna de les corbes C_h , per tant V és una integral primera de X .

Comprovem ara que X satisfà l'equació de compatibilitat (1.3.1). En efecte, sigui $h \in \mathcal{H}$ i prenem $(x, y) \in C_h$, aleshores per l'Equació (1.3.4) tenim $P_h^{-1}(F(x, y)) = M_h(P_h^{-1}(x, y))$. Per altra banda, del fet que Y_h sigui una simetria de Lie de M_h tenim $Y(M_h(P_h^{-1}(x, y))) = M'_h(P_h^{-1}(x, y))Y(P_h^{-1}(x, y))$, per tant

$$\begin{aligned} X(F(x, y)) &= DP_h(P_h^{-1}(F(x, y)))Y(P_h^{-1}(F(x, y))) \\ &= DP_h(M_h(P_h^{-1}(x, y)))Y(M_h(P_h^{-1}(x, y))) \\ &= DP_h(M_h(P_h^{-1}(x, y)))M'_h(P_h^{-1}(x, y))Y(P_h^{-1}(x, y)). \end{aligned}$$

Fixem-nos que, altre cop per l'Equació (1.3.4), tenim

$$DF(x, y) = DP_h(M_h(P_h^{-1}(x, y))) M'_h(P_h^{-1}(x, y)) DP_h^{-1}(x, y),$$

així doncs

$$DF(x, y) DP_h(P_h^{-1}(x, y)) = DP_h(M_h(P_h^{-1}(x, y))) M'_h(P_h^{-1}(x, y)),$$

i, per tant

$$X(F(x, y)) = DF(x, y) DP_h(P_h^{-1}(x, y)) Y(P_h^{-1}(x, y)) = DF(x, y) X(x, y).$$

■

Fixem-nos que el Teorema 1.3.4 és un pas més cap a una resposta positiva de la següent qüestió: *Donada una aplicació integrable birracional amb integral primera racional, existeix sempre una simetria de Lie racional?* [33, Problema obert, p.252].

Les simetries de Lie són objectes interessants dins de la teoria de la integrabilitat discreta, [53]. En particular, la seva existència implica que la dinàmica u-dimensional de les aplicacions reals F sobre una corba invariant és essencialment lineal, [27]. Per tant, com a conseqüència del resultat anterior i del Teorema 1 de [27], obtenim el següent resultat:

Corol·lari 1.3.6. *Sigui F una aplicació real birracional amb una integral primera racional V , que preserva la fibració associada de gènere 0 donada per $\{C_h\}_{h \in \mathcal{H}}$, i sigui X una simetria de Lie de F amb integral primera V . Sigui γ_h una component connexa de $C_h \cap \mathcal{G}(F)$, aleshores:*

- (a) *Si γ_h de C_h és homeomorfa a \mathbb{S}^1 , aleshores $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a una rotació amb número de rotació donat per $\tau(h)/T(h)$, on $T(h)$ és el període de C_h com a òrbita periòdica de (1.3.2), i $\tau(h)$ està definida per l'equació $F(x, y) = \varphi(\tau(h), (x, y))$, on φ denota el flux de X , i $(x, y) \in C_h$.*
- (b) *Si γ_h és homeomorfa a \mathbb{R} , aleshores $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a una translació.*
- (c) *Si γ_h és un punt, aleshores és un punt fix de F .*

Recordem que una aplicació F definida en un conjunt obert de \mathbb{R}^2 , preserva una mesura absolutament contínua respecte la de Lebesgue amb densitat no nul·la ν , si $m(F^{-1}(B)) = m(B)$ per a qualsevol conjunt mesurable de Lebesgue B , on $m(B) = \int_B \nu(x, y) dx dy$. L'existència d'una simetria de Lie que preserva la integral V garanteix l'existència d'unes certes mesures, com a conseqüència dels resultats exposats a [27].

Corol·lari 1.3.7. *Sigui una aplicació real birracional F , amb primera integral racional V , que preserva una fibració de gènere 0 donada per $\{V = h\}_{h \in \mathcal{H}}$. Aleshores hi ha certs conjunts oberts que no es tallen \mathcal{U}^+ i $\mathcal{U}^- \subset \mathcal{U}$ (possiblement algun d'ells buit, però no pas els dos) tals que:*

- (a) *Si F preserva l'orientació a \mathcal{U} , aleshores sobre cada conjunt \mathcal{U}^+ i \mathcal{U}^- , preserva una mesura invariant absolutament contínua respecte la de Lebesgue.*
- (b) *Sobre cada conjunt \mathcal{U}^+ i \mathcal{U}^- , l'aplicació F^2 preserva una mesura invariant absolutament contínua respecte la de Lebesgue.*

Demostració. Observem que F té una simetria de Lie donada per l'Equació (1.3.2). Per construcció, aquesta simetria preserva les corbes $\{V = h\}$ per cada $h \in \mathcal{H}$, per tant aquesta haurà de ser un múltiple del camp vectorial hamiltonià associat a V , és a dir

$$X(x, y) = \mu(x, y) \left(-V_y(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + V_x(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.3.5)$$

En aquest cas, l'equació de compatibilitat (1.3.1), és equivalent a

$$\mu(F(x, y)) = \det(DF(x, y)) \mu(x, y), \quad (1.3.6)$$

veure [27, Teorema 12 (ii)]. Sigui $\mathcal{U}^\pm := \{(x, y) \in \mathcal{U} : \pm \mu(x, y) > 0\}$. Fixem-nos que algun d'ells, però no ambdós, pot ser buit.

Suposem ara que F preserva l'orientació a \mathcal{U} , aleshores l'Equació (1.3.6) implica que ambdós conjunts \mathcal{U}^+ i \mathcal{U}^- són invariants per F . Prenent

$$\nu_\pm(x, y) := \pm \frac{1}{\mu(x, y)},$$

aconsegüim mesures invariants en cada conjunt \mathcal{U}^\pm donades per $m_\pm(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \nu_\pm(x, y) dx dy$ per qualsevol conjunt mesurable Lebesgue $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}^\pm$. En efecte, prenem $\mathcal{B} \in \mathcal{U}^+$ un conjunt mesurable Lebesgue, aleshores usant la fórmula del canvi de variables i l'Equació (1.3.6) aconseguim:

$$\begin{aligned} m_+(F^{-1}(\mathcal{B})) &= \int_{F^{-1}(\mathcal{B})} \nu_+(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{B}} \nu_+(F(x, y)) \det(DF(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{\mu(F(x, y))} \det(DF(x, y)) dx dy = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{\mu(x, y)} dx dy = m_+(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

De manera anàloga, es comprova que m_- és una mesura invariant sobre \mathcal{U}^- , això demostra l'apartat (a), i del fet que $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} 1/\mu(x, y) dx dy$ és una mesura invariant de F^2 a $\mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+$, també demostrem (b). ■

A la secció següent, farem servir la fórmula donada a (1.3.2) per obtenir Simetries de Lie explícites d'alguns exemples particulars d'aplicacions birracionals.

1.3.2 Detecció de conjugacions via les conjugacions de les transformacions de Möbius

Com a conseqüència de la Proposició 1.3.1, és possible de verificar fàcilment si dues aplicacions integrables birracionals que preserven una fibració de gènere 0 són o no són conjugades, tot comprovant si les seves transformacions de Möbius ho són. Aquest fet, el qual es veu recollit a la proposició següent, ens permetrà de construir de manera explícita les conjugacions. A la secció 1.7.2 farem servir aquest resultat per detectar les conjugacions entre les aplicacions associades a les sis recurrències presentades per F. Palladino a [75].

Abans d'enunciar el resultat, però, introduïm les hipòtesis principals i la notació. D'ara endavant suposarem que F i G són aplicacions integrables birracionals a \mathbb{K} amb integral primera V i W respectivament, i que existeixen certs conjunts oberts diferents del buit $\mathcal{H} \subseteq \text{Im}(V)$ i $\mathcal{K} \subseteq \text{Im}(W)$, tals que els conjunts $\mathcal{U} = \{(x, y): V(x, y) = h \in \mathcal{H}\}$ i $\mathcal{V} = \{(x, y): W(x, y) = k \in \mathcal{K}\}$ són diferents del buit, i cada corba $C_h = \{V = h\}$ per a $h \in \mathcal{H}$ i $D_k = \{W = k\}$ per a $k \in \mathcal{K}$ és irreductible a \mathbb{C} i racional.

Siguin $\{P_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ i $\{Q_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ una família de parametritzacions pròpies de la família de corbes $\{C_h\}_{h \in \mathcal{H}}$ i $\{D_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ respectivament, i siguin $M_h = P_h^{-1} \circ F \circ P_h$ i $N_k = Q_k^{-1} \circ G \circ Q_k$ les respectives transformacions de Möbius associades a $F|_{C_h}$ i $G|_{D_k}$. Considerem $\mathcal{G}(M_h)$ el conjunt de bona definició de M_h a \mathbb{K} .

Proposició 1.3.8. *Sota les hipòtesis anteriors, F és conjugada a G via la conjugació $F = \Psi^{-1} \circ G \circ \Psi$, on Ψ és una correspondència entre les corbes C_h a \mathcal{U} i les corbes D_k a \mathcal{V} , si i només si existeix una correspondència f entre \mathcal{H} i \mathcal{K} , tals que per tot $h \in \mathcal{H}$ existeix una funció invertible m_h definida a $\mathcal{G}(M_h)$ de manera que $M_h = m_h^{-1} \circ N_{f(h)} \circ m_h$ per $k = f(h)$. Més encara, la conjugació ve donada per:*

$$\Psi(x, y) = Q_{f(h)} \circ m_h \circ P_h^{-1}(x, y) \Big|_{h=V(x,y)} \quad (1.3.7)$$

i

$$\Psi^{-1}(u, v) = P_{f^{-1}(k)} \circ m_{f^{-1}(k)}^{-1} \circ Q_k^{-1}(u, v) \Big|_{k=W(u,v)} \quad (1.3.8)$$

Demostració. Suposem que existeix una bijecció $k = f(h)$ entre \mathcal{H} i \mathcal{K} , de manera que per tot $h \in \mathcal{H}$ existeix una aplicació invertible m_h definida a $\mathcal{G}(M_h)$ tal que $M_h = m_h^{-1} \circ N_{f(h)} \circ m_h$ per a $k = f(h)$. Considerem l'aplicació Ψ donada per l'Equació (1.3.7), és fàcil de comprovar que per construcció, aplica cada corba C_h a la corba $D_{f(h)}$. Per tant $W(\Psi(x, y)) = f(h)$ per a cada $(x, y) \in C_h$.

Sigui $\Phi(u, v) = P_{f^{-1}(k)} \circ m_{f^{-1}(k)}^{-1} \circ Q_k^{-1}(u, v) \Big|_{k=W(u,v)}$. Provem ara que $\Phi \circ \Psi = \text{Id}$.

En efecte, prenem $(x, y) \in C_h$ i considerem $k := f(h) = W(\Psi(x, y))$, aleshores

$$\Phi \circ \Psi(x, y) = P_{f^{-1}(k)} \circ m_{f^{-1}(k)}^{-1} \circ Q_k^{-1} \circ Q_{f(h)} \circ m_h \circ P_h^{-1}(x, y) =$$

$$= P_h \circ m_h^{-1} \circ Q_k^{-1} \circ Q_k \circ m_h \circ P_h^{-1}(x, y) = (x, y),$$

i de manera anàloga $\Psi \circ \Phi = \text{Id}$, per tant $\Psi^{-1} = \Phi$.

Comprovem ara que Ψ és una conjugació. En efecte,

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} \circ G \circ \Psi(x, y) &= P_h \circ m_h^{-1} \circ Q_k^{-1} \circ G \circ Q_k \circ m_h \circ P_h^{-1}(x, y) = \\ &= P_h \circ m_h^{-1} \circ N_k \circ m_h \circ P_h^{-1}(x, y) = P_h \circ M_h \circ P_h^{-1}(x, y) = F(x, y). \end{aligned}$$

Recíprocament, suposem que F és conjugada de G a \mathcal{U} , via la conjugació $F = \Psi^{-1} \circ G \circ \Psi$ de manera que per tot $h \in \mathcal{H}$, existeix $k \in \mathcal{K}$ tal que $\Psi(C_h) = D_k$ i recíprocament, per tot $k \in \mathcal{K}$, existeix $h \in \mathcal{H}$ de manera que $\Psi^{-1}(D_k) = C_h$. Aquest fet ens permet d'introduir una correspondència f entre \mathcal{H} i \mathcal{K} via $k = W \circ \Psi|_{C_h}$ i $h = V \circ \Psi|_{D_k}^{-1}$.

Prenem doncs $(x, y) \in C_h$, i sigui $k := f(h) = W(\Psi(x, y))$. Aleshores

$$F(x, y) = P_h \circ M_h \circ P_h^{-1}(x, y) = \Psi^{-1} \circ G \circ \Psi,$$

i per tant, per tot $t = P_h^{-1}(x, y) \in \mathcal{G}(M_h)$:

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ G \circ \Psi \circ P_h(t) = P_h^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ Q_k \circ N_k \circ Q_k^{-1} \circ \Psi \circ P_h(t).$$

Per tant, existeix una conjugació $m_h = Q_{f(h)}^{-1} \circ \Psi \circ P_h(t)$ entre M_h i N_k per a $k = f(h)$. ■

Observem que si la dependència en els paràmetres h i k , a totes els termes de l'expressió (1.3.7) i (1.3.8) és racional, i f és una funció birracional, aleshores la conjugació Ψ és una aplicació birracional, i per tant és una conjugació global. Aquesta és la situació que es dóna quan trobem les conjugacions de la prova de la Proposició 1.7.1. De totes maneres cal fer notar, que no sempre la parametrització pròpia d'una corba de la forma $\{V = h\}$ té una dependència racional en el paràmetre h . Aquesta és la situació que ens hem trobat usant els algorismes de parametrització implementats en software de computació simbòlica, com ara Maple, [54].

1.4 La família d'aplicacions de Bastien i Rogalski

Considerem l'aplicació estudiada a [11] donada per

$$F_a(x, y) = \left(y, \frac{a - y + y^2}{x} \right), \quad (1.4.1)$$

definida a $\mathbb{R}^{2,+}$, i amb valors del paràmetre $a > 1/4$.

Observació 1.4.1. Aquesta aplicació sorgeix de l'estudi de l'equació en diferències $u_{n+2} \cdot u_n = a + bu_{n+1} + u_{n+1}^2$ prenent $b = -1$. Com a condició necessària i suficient per l'existència de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a \mathbb{R}^+ per a cada valor inicial $u_1, u_0 > 0$, tenim $b^2 < 4a$ (en el nostre cas $1 < 4a$).

L'aplicació F_a de Bastien i Rogalski definida a (1.4.1) té un únic punt fix afí $(x_0, y_0) = (a, a)$. Si estudiem el seu caràcter, donat que $1 - 4a < 0$, veiem que té valors propis complexes de mòdul 1, concretament

$$\lambda = \frac{2a - 1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}.$$

L'aplicació (1.4.1) té com a integral primera racional, la següent funció definida al quadrant positiu:

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x - y + a}{xy},$$

la qual ens proporciona la corba de nivell associada per a cada valor del paràmetre h (tot fixant el valor de a),

$$C_h = \{x^2 + y^2 - x - y + a - hxy = 0\}.$$

Més concretament, l'aplicació (1.4.1) anterior preserva la fibració donada per les corbes algebraïques C_h de gènere 0. Aquestes corbes representen gràficament hipèrboles (per $h > 2$), paràboles (per $h = 2$) i, el·lipses (per $2 - 1/a < h < 2$, on $V_a(a, a) = 2 - 1/a$), tal i com es pot veure a la Figura 1.

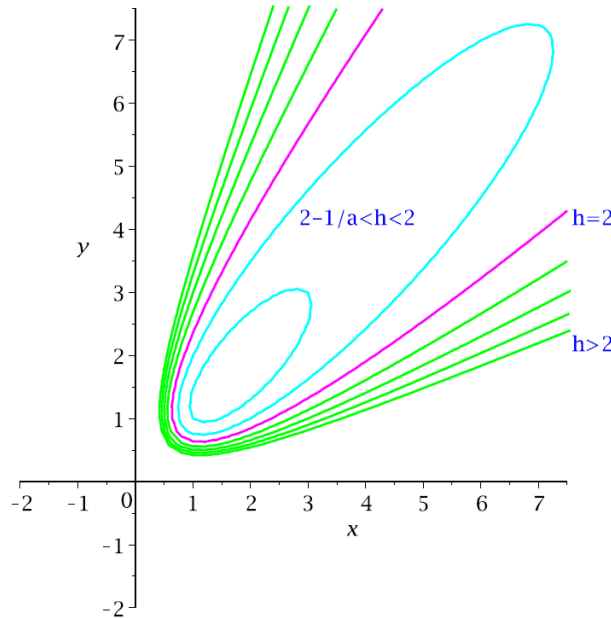


Figura 1. Representació gràfica de les corbes C_h associades a l'aplicació de Bastien i Rogalski.

Usant el mètode descrit als apartats anteriors provarem els següents resultats:

Proposició 1.4.2. *Sigui $a > 1/4$. Considerem $\tilde{C}_h = \{[x : y : z], x^2 + y^2 - hxy - xz - yz + az^2 = 0\}$ i $\tilde{F}_a([x : y : z]) = [xy : az^2 - yz + y^2 : xz]$, les extensions de C_h i F_a a $\mathbb{R}P^2$. Aleshores tenim:*

- (a) *Per $h > 2$, C_h és una hipèrbola, $F_{a|C_h}$ és conjugada a una translació i, hi ha dos punts fixos de $\tilde{F}_{a|\tilde{C}_h}$ a l'infinit donats per $[1 : (1 \pm \sqrt{h^2 - 4})/2 : 0]$, un atractor i un repulsor.*
- (b) *Per $h = 2$, C_h és una paràbola, $F_{a|C_h}$ és conjugada a una translació i, el punt $[1 : 1 : 0]$ és un atractor global de $\tilde{F}_{a|\tilde{C}_h}$.*
- (c) *Per $2 - 1/a < h < 2$, C_h és una el·lipse, $F_{a|C_h}$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació explícit,*

$$\theta(h) = \arg \left(\frac{h - i\sqrt{4 - h^2}}{2} \right) \mod 2\pi. \quad (1.4.2)$$

Fent servir la funció nombre de rotació (1.4.2) reobtenim els resultats aconseguits per G. Bastien i M. Rogalski a [11]:

Proposició 1.4.3 ([11]). *Sigui $a > 1/4$, $h_c = 2 - 1/a$, i $\theta_a = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{2a-1-i\sqrt{4a-1}}{2a} \right)$. Aleshores, tenim:*

- (a) *Per qualsevol valor fixat $a > 1/4$ i qualsevol nombre natural $p \geq E(1/(1 - \theta_a)) + 1$, existeix $h_p \in (h_c, 2)$ tal que C_{h_p} és plena d'òrbites p -periòdiques.*
- (b) *Per tot $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$ existeix $a > 1/4$ i $h_p \in (h_c, 2)$ tal que C_{h_p} és plena d'òrbites p -periòdiques.*

En general, el fet de tenir l'expressió explícita del nombre de rotació $\theta(h)$ permet determinar quines són les corbes C_h plenes d'òrbites p -periòdiques, tot resolent l'equació

$$\theta(h) = \frac{q}{p} \text{ per tot } 1 \leq q \leq p-1, \text{ coprimer amb } p. \quad (1.4.3)$$

En el nostre cas, a partir de l'expressió explícita de $\theta(h)$ donada per (1.4.2) i resolent l'equació anterior per $p \leq 25$, obtenim:

Proposició 1.4.4. *Les corbes C_h estan plenes plenes d'òrbites p -periòdiques de F_a amb període mínim p per $p \leq 25$, si i només si $2 - 1/a < h < 2$, i es satisfà $c_p(h) = 0$ per:*

$$\begin{aligned}
 c_3(h) &= h + 1, & c_4(h) &= h, \\
 c_5(h) &= h^2 + h - 1, & c_6(h) &= h - 1, \\
 c_7(h) &= h^3 + h^2 - 2h - 1, & c_8(h) &= h^2 - 2, \\
 c_9(h) &= h^3 - 3h + 1, & c_{10}(h) &= h^2 - h - 1, \\
 c_{11}(h) &= h^5 + h^4 - 4h^3 - 3h^2 + 3h + 1, & c_{12}(h) &= h^2 - 3, \\
 c_{13}(h) &= h^6 + h^5 - 5h^4 - 4h^3 + 6h^2 + 3h - 1, & c_{14}(h) &= h^3 - h^2 - 2h + 1, \\
 c_{15}(h) &= h^4 - h^3 - 4h^2 + 4h + 1, & c_{16}(h) &= h^4 - 4h^2 + 2, \\
 c_{17}(h) &= h^8 + h^7 - 7h^6 - 6h^5 + 15h^4 + 10h^3 - 10h^2 - 4h + 1, \\
 c_{18}(h) &= h^3 - 3h - 1, \\
 c_{19}(h) &= h^9 + h^8 - 8h^7 - 7h^6 + 21h^5 + 15h^4 - 20h^3 - 10h^2 + 5h + 1, \\
 c_{20}(h) &= h^4 - 5h^2 + 5, \\
 c_{21}(h) &= h^6 - h^5 - 6h^4 + 6h^3 + 8h^2 - 8h + 1, \\
 c_{22}(h) &= h^5 - h^4 - 4h^3 + 3h^2 + 3h - 1, \\
 c_{23}(h) &= h^{11} + h^{10} - 10h^9 - 9h^8 + 36h^7 + 28h^6 - 56h^5 - 35h^4 \\
 &\quad + 35h^3 + 15h^2 - 6h - 1, \\
 c_{24}(h) &= h^4 - 4h^2 + 1, \\
 c_{25}(h) &= h^{10} - 10h^8 + 35h^6 + h^5 - 50h^4 - 5h^3 + 25h^2 + 5h - 1.
 \end{aligned}$$

Fem notar que el mètode de càlcul emprat per trobar les *condicions de periodicitat* $c_k(h) = 0$ del resultat anterior permet anar molt més enllà del període $p = 25$. Hem decidit enunciar el resultat fins a aquest període per raons de brevetat.

Abans de provar aquests resultats però, ens faran falta un parell de lemes previs. Més concretament, el primer pas del mètode que volem desenvolupar implica la parametrització d'aquestes corbes. Considerarem doncs, el mètode de la parametrització per rectes que hem detallat a l'apartat (1.2.4) tot obtenint el següent lema:

Lema 1.4.5. *Considerem la família de corbes algebraiques de gènere 0*

$$C_h = \{x^2 + y^2 - x - y + a - hxy = 0\}.$$

Aleshores $P_h(t) = (P_{1,h}(t), P_{2,h}(t))$ és una parametrització pròpia real, de cada corba C_h , on:

$$\begin{aligned}
 P_{1,h}(t) &= \frac{2\delta t - ah^2 - (1 + \delta)h - 2 + 4a}{2(-t^2 + ht - 1)} + a, \\
 P_{2,h}(t) &= \frac{(-ah + \delta - 1)t^2 + (4a - 2)t - ah - \delta - 1}{2(-t^2 + ht - 1)}.
 \end{aligned}$$

amb $\delta = \sqrt{(ha + 1 - 2a)(ha + 1 + 2a)} \in \mathbb{R}$.

Demostració. Sigui C_h la nostra cònica irreductible $f_a(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + a - hxy$ la qual no passa per l'origen (condició necessària per al nostre mètode). Prenem doncs un punt sobre la corba

$$(x_0, y_0) = \left(a, \frac{ah + 1 + \delta}{2} \right)$$

i, fem el canvi de variable $x = u + x_0, y = v + y_0$ sobre la corba, de manera que obtenim una nova corba \bar{C}_h que passa per l'origen. Més concretament: $\bar{C}_h = f_2(u, v) + f_1(u, v)$ on

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= (-ah^2/2 - (1 + \delta)h/2 - 1 + 2a)u + \delta v, \\ f_2(u, v) &= u^2 + v^2 - huv, \end{aligned}$$

Vegem ara quina és la solució del sistema format per la nova corba i una recta de pendent t qualsevol. A tals efectes, resollem el sistema format per

$$\begin{cases} v = tu \\ f_2(u, v) + f_1(u, v) = 0 \end{cases}$$

el qual ens dóna $(p_1(t), p_2(t))$ com a solució. On

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{2\delta t - ah^2 - (1 + \delta)h - 2 + 4a}{2(-t^2 + ht - 1)}, \\ p_2(t) &= \frac{t(2\delta t - ah^2 - (1 + \delta)h - 2 + 4a)}{2(-t^2 + ht - 1)}. \end{aligned}$$

La solució que acabem de trobar, és una parametrització de la corba traslladada. Cal arreglar-la doncs, de manera que passi pels punts originals (i no per l'origen). Considerem:

$$\begin{aligned} P_{1h}(t) &= p_1(t) + x_0 = \frac{2\delta t - ah^2 - (1 + \delta)h - 2 + 4a}{2(-t^2 + ht - 1)} + a, \\ P_{2h}(t) &= p_2(t) + y_0 = \frac{(-ah + \delta - 1)t^2 + (4a - 2)t - ah - \delta - 1}{2(-t^2 + ht - 1)}. \end{aligned}$$

Acabem d'aconseguir, doncs, una parametrització real de la nostra corba de nivell $P_h(t) = (P_{1h}(t), P_{2h}(t))$, tot aplicant la parametrització per rectes detallada a l'apartat (1.2.4).

Observem també que $\delta \in \mathbb{R}$, donat que $(ha + 1 - 2a)(ha + 1 + 2a) = (ha + 1)^2 - (2a)^2$ on sabem que $a > 1/4$ i $h > 2 - 1/a$. Tenim per tant, que $h > 2 - 1/a \Rightarrow 1 + ha > 2a \Rightarrow (1 + ha)^2 > (2a)^2 \Rightarrow \delta \in \mathbb{R}$.

Finalment, demostrem que la parametrització anterior és pròpia, tot aplicant la igualtat dels graus explicitada al Teorema 1.2.11:

$$\deg(P_h(t)) = \max\{\deg(P_{1h}(t)), \deg(P_{2h}(t))\} = \max\{\deg_x(f_a), \deg_y(f_a)\} = 2,$$

on $f_a(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ és el polinomi que defineix la nostra corba afí racional C_h . ■

A continuació, ens interessaria aplicar el resultat de la Proposició 1.3.1, per això necessitem la inversa de la parametrització anterior. Concretament:

Lema 1.4.6. *La inversa de la parametrització $P_h(t)$ ve donada per l'expressió:*

$$P_h^{-1}(x, y) = \frac{-2\delta x + (ah^2 + (\delta + 1)h - 4a + 2)y - ah + 2a + \delta - 1}{(ah^2 + (1 - \delta)h - 4a + 2)x + 2\delta y + ah - 2a - \delta + 1},$$

on $\delta = \sqrt{(ha + 1 - 2a)(ha + 1 + 2a)} \in \mathbb{R}$.

Demostració. Buscarem la parametrització inversa de $P_h(t)$ aplicant els passos detallats a l'apartat 1.2.5. Per aquest motiu, ens ajudarem d'uns polinomis associats a la parametrització i en buscarem el màxim comú divisor. Siguin doncs H_1 i H_2 definits, tal i com segueix:

$$\begin{aligned} H_1(t, x) &= \text{denom}(P_{1h}(t)) \cdot x - \text{numer}(P_{1h}(t)) \\ &= (-2x + 2a)t^2 + (2hx - 2\delta - 2ha)t - 2x + h\delta + h + 2 + ah^2 - 2a, \\ H_2(t, y) &= \text{denom}(P_{2h}(t)) \cdot y - \text{numer}(P_{2h}(t)) \\ &= (-\delta + ha + 1 - 2y)t^2 + (2hy - 4a + 2)t - 2y + ha + 1 + \delta. \end{aligned}$$

Fixem-nos que $\gcd(H_1, H_2) = 1$, per tant pel Teorema 1.2.19 tenim que la seva arrel simple ens dona la parametrització inversa. Busquem-lo doncs pel mètode dels residus

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{residu}(H_1, H_2) = \\ &= \frac{t}{a - x} \left((-ah^2 + h\delta + 4a - h - 2)x - 2\delta y - ah + \delta + 2a - 1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{a - x} \left(-2\delta x + (ah^2 + h\delta - 4a + h + 2)y - ah + \delta + 2a - 1 \right), \end{aligned}$$

i, resolem-lo en funció del paràmetre t

$$P_h^{-1}(x, y) = \frac{-2\delta x + (ah^2 + (\delta + 1)h - 4a + 2)y - ah + 2a + \delta - 1}{(ah^2 + (1 - \delta)h - 4a + 2)x + 2\delta y + ah - 2a - \delta + 1}.$$

Tenim doncs la inversa de la parametrització que buscàvem. ■

Estem doncs en condicions de demostrar les Proposicions 1.4.2 i 1.4.3.

Demostració de la Proposició 1.4.2. És senzill de comprovar que per qualsevol valor fixat $a > 1/4$, les corbes C_h són el·lipses per $2 - 1/a < h < 2$, paràboles quan $h = 2$, i una branca d'hipèrbola quan $2 < h < \infty$ ([11]), vegeu també la Figura 1.

Dels lemes anteriorment demostrats tenim que $\{P_h(t) = (P_{1,h}(t), P_{2,h}(t))\}_{\{h > 2-1/a\}}$ és una família de parametritzacions afins pròpies de $\{C_h\}_{\{h > 2-1/a\}}$. Un simple càlcul ens dona també

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ F_a \circ P_h(t) = \frac{(h+1)t - 1}{t + 1},$$

per tant $F|_{C_h}$ és conjugada a una transformació de Möbius $M_h|_{\mathbb{R}}$.

Més encara, directament de l'expressió (1.3.2) donada al Teorema 1.3.4 aconseguim que la nostra aplicació tingui una simetria de Lie, definida a $\mathbb{R}^{2,+}$ i, donada per

$$X(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + a - x}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2 - y^2 - a + y}{x} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sabent que $X = \mu(-V_y, V_x)$, obtenim $\mu = xy$ i, per tant, F preserva una mesura absolutament contínua respecte la de Lebesgue a $\mathbb{R}^{2,+}$ donada per

$$m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{xy} dx dy$$

per a qualsevol conjunt mesurable de Lebesgue \mathcal{B} de $\mathbb{R}^{2,+}$.

La dinàmica afí de cadascuna d'aquestes aplicacions $F_a|_{C_h}$ està donada pel Corol·lari 1.3.6, per tant és una conjugació d'una translació quan $h > 2$ i, conjugada a una rotació quan $2 - 1/a < h < 2$.

Fixem-nos ara que, per cada h l'aplicació de Möbius $M_h(t)$ té dos punts fixos t_0 i t_1 donats per $t_j = (h + (-1)^j \sqrt{h^2 - 4})/2$. Observem que aquests valors dels paràmetres no es corresponen a punts afins de C_h . En efecte, cada corba s'estén a $\mathbb{R}P^2$ com $\tilde{C}_h = \{[x : y : z], x^2 + y^2 - hxy - xz - yz + az^2 = 0\}$ i, aquesta es pot parametritzar pròpiament per a $t \in \mathbb{R}$ mitjançant

$$\tilde{P}_h(t) = \begin{bmatrix} -2at^2 + (2ah + 2\delta)t - ah^2 - h\delta + 2a - h - 2 : \\ (-ah + \delta - 1)t^2 + (4a - 2)t - ah - \delta - 1 : 2(-t^2 + ht - 1) \end{bmatrix}.$$

Els valors dels paràmetres t_j es corresponen amb els punts de l'infinit

$$Q_{j,h} = [2 : h + (-1)^j \sqrt{h^2 - 4} : 0]$$

els quals són punts fixos de l'extensió de F a $\mathbb{R}P^2$ donada per

$$\tilde{F}_a([x : y : z]) = [xy : az^2 - yz + y^2 : xz].$$

Per descomptat, si $h = 2$, aleshores $t_1 = t_0 = 1$ i $Q_{1,h} = Q_{0,h} = [1 : 1 : 0]$.

Fent servir la notació de la Proposició 1.3.3 aplicada a l'aplicació M_h , obtenim $\Delta = h^2 - 4$, $\xi = (h + 2 - \sqrt{h^2 - 4})/(h + 2 + \sqrt{h^2 - 4})$ i també:

- Per $h > 2$ tenim $\Delta > 0$ i $\xi < 1$. En aquest cas t_0 és un atractor de M_h a $\widehat{\mathbb{R}} \setminus t_1$ i t_1 és un repulsor. Per tant $Q_{0,h}$ és un atractor de $\widetilde{F}_{a|\widetilde{C}_h}$ a $\widetilde{C}_h \setminus Q_{1,h}$, i $Q_{1,h}$ és un repulsor.
- Per $h = 2$, tenim $\Delta = 0$, per tant el punt $t_0 = h/2$ és un atractor global de M_2 a $\widehat{\mathbb{R}}$, per tant $Q_{0,h} = [1 : 1 : 0]$ és un atractor global de $\widetilde{F}_{a|\widetilde{C}_2}$ a \widetilde{C}_2 .
- Per $2 - 1/a < h < 2$, tenim $\Delta < 0$ i aleshores M_h és conjugada a una rotació a $\widehat{\mathbb{R}}$, amb nombre de rotació

$$\theta(h) = \arg \left(\frac{h + 2 - i\sqrt{4 - h^2}}{h + 2 + i\sqrt{4 - h^2}} \right) \pmod{2\pi} = \arg \left(\frac{h - i\sqrt{4 - h^2}}{2} \right) \pmod{2\pi}.$$

i per tant $F_{a|C_h}$ és conjugada a una rotació amb el mateix nombre de rotació (observem però, que en aquest cas, les corbes C_h són el·lipses afins sense punts a la línia de l'infinit).

■

Demostració de la Proposició 1.4.3. (a) A la demostració de la Proposició 1.4.2 hem vist que per $2 - 1/a < h < 2$, cada aplicació $F_{a|C_h}$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació donat per l'equació (1.4.2). És fàcil de comprovar que per a un valor fixat $a > 1/4$ aquesta funció $\theta(h)$ creix monòtonament des de θ_a fins a 1 per a $h \in (h_c, 2)$, on anomenem $h_c = 2 - 1/a$ i

$$\theta_a = \lim_{h \rightarrow h_c^+} \theta(h) = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{h_c - i\sqrt{4 - h_c^2}}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{2a - 1 - i\sqrt{4a - 1}}{2a} \right).$$

Encara més, per tot $\theta \in (\theta_a, 1)$ existeix $h \in (h_c, 2)$ de manera que $\theta(h) = \theta$, per tant, per a caracteritzar el conjunt de períodes de qualsevol aplicació F_a a $\mathbb{R}^{2,+}$, necessitem conèixer quines són les fraccions irreductibles $q/p \in (\theta_a, 1)$.

Fixem-nos que si una fracció irreductible $q/p \in (\theta_a, 1)$, aleshores $1 \leq q \leq p - 1$ i per tant $(p - 1)/p \in (\theta_a, 1)$, donat que

$$\theta_a < \frac{q}{p} \leq \frac{p - 1}{p} < 1.$$

Així doncs, només necessitem caracteritzar quins són els nombres enters p tals que $\theta_a < (p - 1)/p$. Fàcilment s'obté $p > 1/(1 - \theta_a)$, per tant

$$p \geq E \left(\frac{1}{1 - \theta_a} \right) + 1.$$

(b) Un breu càlcul ens dóna que per $1/4 < a \leq 1/2$, h_c varia monòtonament des de -2 fins a 0 , i per tant $2\pi\theta_a$ és un angle al tercer quadrant que varia des de π fins $3\pi/4$. Si $a > 1/2$, aleshores $h_c > 0$ i $2\pi\theta_a$ és un angle del quart quadrant. Per tant

$$I := \bigcup_{a>1/4} (\theta_a, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Fixem-nos que $1/p \in I$ per tot $p \geq 3$, per tant arribem al resultat que volíem demostrar. ■

Demostració de la Proposició 1.4.4. Com que la funció número de rotació $\theta(h)$ ve donada per l'expressió (1.4.2), l'equació (1.4.3) es satisfà, i per tant el nivell h està ple de punts de període mínim p , si i només si

$$\xi_p := \frac{h - i\sqrt{4 - h^2}}{2}, \quad (1.4.4)$$

és una arrel p -èsima *primitiva* de la unitat. Aquestes condicions estan contingudes al conjunt de solucions del sistema

$$\begin{cases} \xi^2 - h\xi + 1 = 0, \\ \xi^p - 1 = 0. \end{cases}$$

Per tant, per a obtenir els valors de h pels quals es satisfà (1.4.4) només hem de mirar quins són els factors de

$$\phi_p(h) := \text{Res}(\xi^2 - h\xi + 1, \xi^p - 1; \xi)$$

que no apareixen a les expressions de $\phi_k(h)$ per tot $k < p$ divisor de p . Notem que $\text{Res}(\cdot, \cdot; \xi)$ denota la resultant dels dos polinomis respecte a ξ . Recordem que aquesta resultant només s'anul·la quan els dos polinomis tenen un zero comú (real o complex). Només detallem els càlculs quan $p = 25$:

$$\begin{aligned} \phi_{25}(h) &= \text{Res}(\xi^2 - h\xi + 1, \xi^{25} - 1; \xi) \\ &= (2 - h)(h^2 + h - 1)^2(h^{10} - 10h^8 + 35h^6 + h^5 - 50h^4 - 5h^3 \\ &\quad + 25h^2 + 5h - 1)^2. \end{aligned}$$

Podem excloure el factor $2 - h$ perquè quan $h = 2$, $F_{a|C_2}$ és conjugada a una translació (vegeu la Proposició 1.4.2 (b)). Els valors de h que anul·len el factor $h^2 + h - 1$ corresponen a punts periòdics de període mínim 5. Per tant, la condició que caracteritza el punts periòdics de període mínim 25 és

$$c_{25}(h) = h^{10} - 10h^8 + 35h^6 + h^5 - 50h^4 - 5h^3 + 25h^2 + 5h - 1 = 0.$$

■

1.5 L'aplicació de Saito i Saitoh

A [82], S. Saito i N. Saitoh consideren l'aplicació

$$F(x, y) = \left(xy, \frac{y(1+x)}{1+xy} \right), \quad (1.5.1)$$

definida al conjunt obert $\mathcal{G}(F) = \mathbb{C}^2 \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(x, -1/x)\}$, i troben un continu d'òrbites 3-periòdiques. Aquí descriurem la dinàmica global de F , i veurem que hi ha un continu d'òrbites periòdiques de període mínim p per tot $p \geq 2$, el qual té una expressió simple donada per $y(1+x) = h_p$, essent h_p una arrel primitiva p -èsima de la unitat.

Aquesta aplicació té l'integral primera $V(x, y) = y(1+x)$, vegeu novament [82]. Per tant, els conjunts afins $\gamma_h := \{y(1+x) = h, h \in \mathbb{C}\} \cap \mathcal{G}(F)$ són invariants. L'extensió a \mathbb{CP}^2 de tots aquests conjunts conté els punts afins de γ_h més els punts de l'infinít $[1 : 0 : 0]$ i $[0 : 1 : 0]$. Però aquests punts de l'infinít pertanyen a un conjunt que anomenem *conjunt d'indeterminació* de l'extensió de F a \mathbb{CP}^2 que ve donada per $\tilde{F}([x : y : z]) = [xy(xy + z^2) : yz^2(x + z) : (xy + z^2)z^2]$. Amb això volem dir que: $\tilde{F}([1 : 0 : 0]) = \tilde{F}([0 : 1 : 0]) = [0 : 0 : 0]$ (veure [39, 40] per aprofundir en el tema) i, aquesta és la raó per la qual describim la dinàmica de F només a l'espai afí \mathbb{C}^2 . Aleshores, la dinàmica global ve donada al següent resultat.

Proposició 1.5.1. *Considerem l'aplicació (1.5.1), aleshores:*

- (a) *Qualsevol solució amb condicions inicials sobre γ_0 tendeix al punt $(0, 0)$, el qual és un atractor global de $F|_{\gamma_0}$, en un temps finit.*
- (b) *Per $h \neq 1$, sobre un conjunt invariant γ_h hi ha dos punts fixos de F , donats per $Q_0 = (0, h)$ i $Q_1 = (h - 1, 1)$. Més encara,*
 - (i) *Si $|h| < 1$, aleshores el punt Q_0 és un atractor de $F|_{\gamma_h}$ a $\gamma_h \setminus Q_1$, i Q_1 és un repulsor. Recíprocament si $|h| > 1$, aleshores el punt Q_0 és el repulsor i Q_1 un atractor de $F|_{\gamma_h}$ a $\gamma_h \setminus Q_0$.*
 - (ii) *Si $|h| = 1$, aleshores qualsevol condició inicial (x_0, y_0) dins γ_h dona lloc a una òrbita periòdica amb període mínim $p \geq 2$, quan h és una arrel primitiva p -èsima de la unitat, o dona lloc a una òrbita que omple densament el conjunt $\gamma_h \cap \{W(x, y) = W(x_0, y_0)\}$, on $W(x, y) = |x/(x - h + 1)|$.*
- (c) *Per $h = 1$, el punt $p = (0, h)$ és l'únic punt fix de F a γ_1 , el qual és un atractor global de $F|_{\gamma_1}$.*

Demostració. El conjunt γ_0 ve donat per les línies $x = -1$ i $y = 0$. Fixem-nos que $(0, 0) \in \gamma_0$ és un punt fix de F . És senzill veure que $F^2(-1, y) = (0, 0)$ i $F(x, 0) = (0, 0)$ per tot $x, y \in \mathbb{C}$, la qual cosa prova l'apartat (a).

Per provar els apartats (b) i (c) considerarem que $h \neq 0$. Fixem-nos que el conjunt γ_h ve donat per la intersecció de la corba $C_h = \{y(1+x) = h\}$ amb \mathcal{G} . La corba C_h admet una parametrització trivial pròpia i afí, donada per l'expressió

$$P_h(t) = \left(t, \frac{h}{t+1}\right) \text{ per } t \neq -1.$$

Fixem-nos que el paràmetre $t = -1$ es correspon amb el punt de l'infinit que hem exclòs $[0 : 1 : 0]$. Observem també que $P_h^{-1}(x, y) = x$. Amb uns càlculs simples obtenim:

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ F \circ P_h(t) = \frac{ht}{t+1}.$$

Es comprova fàcilment que $\gamma_h = C_h \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(-1/(h+1), h+1)\}$ per $h \neq -1$; que $\gamma_{-1} = C_{-1}$; i que per qualsevol $h \in \mathbb{C}$, l'aplicació $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a $M_{h|\mathcal{G}(M_h)}$, on $\mathcal{G}(M_h) = \mathbb{C} \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} M_h^{-n}(-1)\}$ és el conjunt de bona definició de M_h a \mathbb{C} . En particular $\mathcal{G}(M_{-1}) = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Cada aplicació M_h té dos punts fixos $t_0 = 0$ i $t_1 = h-1$ corresponents als paràmetres dels punts $Q_0, Q_1 \in \mathbb{C}^2$ respectivament. El resultat doncs, segueix directament de la Proposició 1.3.3. En particular, per $|h| = 1$ amb $h \neq 1$, $\Delta = (1-h)^2$ i $\xi = 1/h$, hom pot demostrar fàcilment que l'aplicació M_h és conjugada a una rotació a \mathbb{C} amb nombre de rotació

$$\theta(h) = \arg\left(\frac{1}{h}\right) \pmod{2\pi} = \arg(\bar{h}) \pmod{2\pi}.$$

Per tant l'aplicació $F|_{\gamma_h}$ té un continu d'òrbites periòdiques totes elles de períodes mínim $p \geq 2$, localitzats a la hipèrbola $y(1+x) = h_p$, essent h_p una arrel primitiva p -èssima de la unitat. Més encara, en aquest cas

$$W(x, y) = \left| \frac{x}{x-h+1} \right|,$$

és una integral primera de $F|_{\gamma_h}$. Si h no és una arrel p -èssima de la unitat, aleshores per cada condició inicial sobre γ_h , l'òrbita associada de $F|_{\gamma_h}$ omple densament el conjunt $\gamma_h \cap \{W = W(x_0, y_0)\}$. ■

Notem que, com a conseqüència dels resultats detallats més amunt, les úniques òrbites periòdiques que podem observar a \mathbb{R}^2 són les òrbites 2-periòdiques les quals estan localitzades a la hipèrbola real $y(1+x) = -1$.

Finalment, com a conseqüència directa del Teorema 1.3.4, tenim que:

Corol·lari 1.5.2. *L'aplicació (1.5.1) posseeix la simetria de Lie*

$$X(x, y) = -x(1+x)(y-1) \frac{\partial}{\partial x} + xy(y-1) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Demostració. Pel Lema 1.3.5, l'aplicació de Möbius $M_h(t) = ht/(t+1)$ té la simetria de Lie $Y_h(t) = ((1-h)t + t^2) \frac{\partial}{\partial t}$. Ara obtenim la simetria de Lie de F de l'Equació (1.3.2), usant la parametrització $P_h(t) = (t, h/(t+1))$ i prenent $h = y(1+x)$. ■

Fixem-nos que el camp vectorial anterior és un múltiple del hamiltonià (1.3.5) amb $\mu(x, y) = x(y-1)$.

1.6 Una equació amb diferències amb l'invariant de Saito i Saitoh

Considerem l'equació en diferències *real*

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}(1+u_n)}{1+u_{n+1}}. \quad (1.6.1)$$

Aquesta equació té un invariant donat per la relació $I(u_n, u_{n+1}) = u_{n+1}(1+u_n)$.

Vam trobar aquesta equació tot buscant una recurrència amb el mateix invariant que el de l'aplicació de Saito i Saitoh. Més tard, vam veure que aquesta equació és un cas particular de les sis que es proposen a [75], les quals estan considerades a la Secció 1.7.

Considerem $\Gamma \subset \mathbb{R}$, el conjunt de bona definició de l'equació (1.6.1), aleshores per cada condició inicial u_0, u_1 a $\Gamma \subset \mathbb{R}$, sigui $I := I(u_0, u_1) = u_1(1+u_0)$ i

$$t_j = t_j(u_0, u_1) := \frac{-1 + (-1)^j \sqrt{1+4I}}{2} \quad \text{i,} \quad \xi = -\frac{1+2I+i\sqrt{-1-4I}}{2I}.$$

Proposició 1.6.1. *Segui $\{u_n\}$ una solució de l'Equació (1.6.1) amb condicions inicials u_0, u_1 a Γ , aleshores:*

- (a) *Si $u_1 = u_0$ i $u_0 \neq -1$, aleshores la solució és constant.*
- (b) *Si $u_1(1+u_0) \geq -1/4$ amb $u_0 \neq t_1$ i $u_1 \neq t_1$, aleshores la solució convergeix a $u = t_0$.*
- (c) *Si $u_1(1+u_0) < -1/4$, aleshores o bé la solució és p -periòdica si ξ és una arrel p -èssima de la unitat, o bé \mathbb{R} és el conjunt d'acumulació de punts de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Més encara, l'Equació (1.6.1) té solucions p -periòdiques per a qualsevol període $p \geq 3$.*

La demostració de la proposició anterior segueix directament de l'estudi del sistema dinàmic real al pla donat per l'aplicació

$$F(x, y) = \left(y, \frac{y(1+x)}{1+y} \right), \quad (1.6.2)$$

tenint en compte que $(u_n, u_{n+1}) = F^n(u_0, u_1)$. Aquesta aplicació està definida a $\mathcal{G}(F) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(x, -1)\}$. De la mateixa manera que a l'aplicació (1.5.1), aquesta aplicació F té com a integral primera $V(x, y) = y(1+x)$, per tant els conjunts $\gamma_h := \{y(1+x) = h, h \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{G}(F)$ són invariants. Observem que els punts fixos de F tenen la forma (x, x) , amb $x \neq -1$. Per aquesta aplicació tenim el següent resultat:

Proposició 1.6.2. *Considerem l'aplicació (1.6.2), aleshores*

(a) *Qualsevol solució amb condicions inicials sobre γ_0 convergeix al punt $(0, 0)$ en un temps finit.*

(b) *Per $h \neq 0$, la dinàmica al conjunt invariant γ_h és la següent:*

- (i) *Si $h > -1/4$, aleshores existeixen dos punts fixos de F a γ_h , $Q_{j,h} = (x_j, x_j)$, amb $j = 0, 1$, on $x_j = (-1 + (-1)^j \sqrt{1+4h})/2$. Més encara, Q_0 és un atractor global de $F|_{\gamma_h \setminus Q_1}$, i Q_1 és un repulsor.*
- (ii) *Si $h = -1/4$, aleshores existeix un únic punt fix de F a $\gamma_{-1/4}$, $Q = (-1/2, -1/2)$ el qual és un atractor global de $F|_{\gamma_{-1/4}}$.*
- (iii) *Si $h < -1/4$, aleshores qualsevol condició inicial a γ_h o bé dóna lloc a una òrbita periòdica amb període mínim $p \geq 3$, o bé dóna lloc a certes òrbites que omplen densament aquest conjunt, depenent del fet que $(-1-2h-i\sqrt{-1-4h})/(2h)$ sigui una arrel p-èsima primitiva de la unitat o no.*

Demostració. Primerament observem que després d'una o dues iteracions, qualsevol òrbita obtinguda amb condicions inicials a $\gamma_0 = \{\{x = -1\} \cup \{y = 0\}\} \cap \mathcal{G}(F)$ convergeix al punt $(0, 0)$. Considerem ara $h \neq 0$, fixem-nos que qualsevol hipèrbola $C_h = \{y(1+x) = h\}$ admet una parametrització pròpia $P_h(t) = (t, h/(t+1))$ per $t \neq -1$. Amb unes quantes operacions obtenim que $\gamma_h = C_h \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(-h-1, -1)\}$,

$$M_h(t) = P_h^{-1} \circ F \circ P_h(t) = \frac{h}{t+1},$$

i que $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a $M_h|_{\mathcal{G}(M_h)}$, on $\mathcal{G}(M_h) := \mathbb{R} \setminus \{\bigcup_{n \geq 0} M_h^{-n}(-1)\}$.

Fent servir la Proposició 1.3.3, prenent $\Delta = 1+4h$ i $\xi = (-1-2h-\sqrt{1+4h})/(2h)$, tenim que si $h > -1/4$, aleshores l'aplicació M_h té dos punts fixos $t_{0,h}$ (un atractor) i $t_{1,h}$ (un repulsor) donats per

$$t_{j,h} = \frac{-1 + (-1)^j \sqrt{1+4h}}{2}.$$

Per tant, sobre cada conjunt γ_h hi ha dos punts fixos $Q_{0,h} = (t_{0,h}, t_{0,h})$ i $Q_{1,h} = (t_{1,h}, t_{1,h}) \in \mathbb{R}^2$, els quals són un atractor i un repulsor de $F|_{\gamma_h}$, respectivament. Si $h = -1/4$, aleshores $M_{-1/4}$ té un únic punt fix $t = -1/2$ el qual és un atractor global

a $\mathcal{G}(M_{-\frac{1}{4}})$, per tant l'aplicació $F|_{\gamma_{-\frac{1}{4}}}$ té un atractor global al punt $(-1/2, -1/2)$. Si $h < -1/4$, aleshores l'aplicació M_h definida a $\widehat{\mathbb{R}}$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació donat per

$$\theta(h) = \arg \left(-\frac{1+2h}{2h} - i \frac{\sqrt{-1-4h}}{2h} \right) \pmod{2\pi}.$$

Amb uns quants càlculs més, obtenim que

$$I = \left\{ \text{Image}(\theta(h)), h < -\frac{1}{4} \right\} = \left(\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Així doncs, hi trobem fraccions irreductibles amb denominador $p \in I$ si i només si $p \geq 3$, i per tant l'aplicació F admet òrbites periòdiques de tots els períodes $p \geq 3$, les quals estan localitzades a la regió $\{y(1+x) < -1/4\}$. Més encara, els conjunts γ_{h_p} on estan localitzades aquestes òrbites periòdiques amb període mínim p , són aquells tals que $\xi|_{h=h_p} = (-1 - 2h_p - i\sqrt{-1-4h_p})/(2h_p)$ és una arrel primitiva p -èsima de la unitat. Fixem-nos també, que F no té òrbites 2-periòdiques i, que si ξ no és una arrel de la unitat aleshores qualsevol òrbita a γ_h omple densament aquest conjunt. ■

Fixem-nos que la demostració de la Proposició 1.6.1 també surt directament de l'anàlisi de les aplicacions de Möbius M_h , on només cal tenir en compte la forma particular de les parametritzacions P_h , que ens donen $u_n = M_h^n(u_0)$.

Cal dir també que la Simetria de Lie de l'aplicació (1.6.2) la donem a la Secció 1.7.1.

1.7 Les recurrències de Palladino

A [75], F. Palladino presenta l'anàlisi del *conjunt de no definició* d'un llistat de sis equacions en diferències a \mathbb{C} amb invariants racionals. Aquests invariants permeten a l'autor de fer una reducció en l'ordre de les equacions, de manera que la dinàmica de les mateixes podia ser explicada via una família d'equacions de Riccati. De fet, totes les equacions de Palladino tenen associada una aplicació integrable birracional que preserva una fibració de gènere 0. Per tant, la reducció d'ordre observada per Palladino en aquestes equacions són una conseqüència del fet general observat a la Proposició 1.3.1.

A les següents subseccions calcularem les simetries de Lie respectives a les aplicacions associades a les recurrències de Palladino, estudiarem les conjugacions entre aquestes aplicacions i, com a darrer exemple, estudiarem la dinàmica d'un representant de cada conjunt de recurrències no conjugades.

1.7.1 Simetries de Lie de les aplicacions associades a les recurrències de Palladino

En aquesta secció considerarem les aplicacions F_j , $j = 1, \dots, 6$, associades a cadascuna de les recurrències de Palladino. Per aquestes aplicacions donarem una família de parametritzacions pròpies associades a cada fibració $C_{j,h} = \{V_{j,1} - hV_{j,2} = 0\}$ on $V_j = V_{j,1}/V_{j,2}$ és la integral primera corresponent als invariants donats a [75]. Donarem també les transformacions de Möbius associades a les aplicacions, la parametrització i la simetria de Lie associada en cada cas.

1. L'equació $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{1+b(u_n - u_{n+1})}$ amb $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, té associats els següents objectes, els quals caracteritzen la seva dinàmica.

Aplicació associada: $F_1(x, y) = \left(y, \frac{y}{1+b(x-y)}\right)$	Integral primera: $V_1(x, y) = \frac{1+bx+by+b^2xy}{y}$	Parametrització de $C_{1,h}$: $P_{1,h}(t) = \left(t, \frac{-bt-1}{b^2t+b-h}\right)$
Aplicació de Möbius: $M_{1,h}(t) = \frac{-bt-1}{b^2t+b-h}$	Simetria de Lie de $M_{1,h}$: $Y_{1,h} = (1+(2b-h)t+b^2t^2) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_1 : $X_1 = -\frac{(x-y)(bx+1)}{y}$ $X_2 = -b(x-y)(by+1)$

2. Objectes associats a la recurrència $u_{n+2} = \frac{u_n}{1+b(u_{n+1}-u_n)}$ amb $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Aplicació associada: $F_2(x, y) = \left(y, \frac{x}{1+b(y-x)}\right)$	Integral primera: $V_2(x, y) = \frac{1+by+xy}{xy}$	Parametrització de $C_{2,h}$: $P_{2,h}(t) = \left(t, \frac{1}{(h-1)t-b}\right)$
Aplicació de Möbius: $M_{2,h}(t) = \frac{1}{(h-1)t-b}$	Simetria de Lie de $M_{2,h}$: $Y_{2,h} = (-1-bt+(h-1)t^2) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_2 : $X_1 = \frac{x-y}{y}$ $X_2 = -\frac{(x-y)(by+1)}{x}$

3. Objectes associats a la recurrència $u_{n+2} = \frac{b(u_{n+1}-u_n)+u_{n+1}^2}{u_n}$ amb $b \in \mathbb{C}$:

Aplicació associada: $F_3(x, y) = \left(y, \frac{-bx+by+y^2}{x}\right)$	Integral primera: $V_3(x, y) = \frac{y+b}{x}$	Parametrització de $C_{3,h}$: $P_{3,h}(t) = (t, ht-b)$
Aplicació de Möbius: $M_{3,h}(t) = ht-b$	Simetria de Lie de $M_{3,h}$: $Y_{3,h} = (b+(1-h)t) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_3 : $X_1 = x-y$ $X_2 = \frac{(x-y)(b+y)}{x}$

4. Objectes associats a la recurrència $u_{n+2} = \frac{bu_{n+1}+u_{n+1}^2}{u_n+b}$ amb $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Aplicació associada: $F_4(x, y) = \left(y, \frac{by + y^2}{x + b}\right)$	Integral primera: $V_4(x, y) = \frac{x + b}{y}$	Parametrització de $C_{4,h}$: $P_{4,h}(t) = \left(t, \frac{t + b}{h}\right)$
Aplicació de Möbius: $M_{4,h}(t) = \frac{t + b}{h}$	Simetria de Lie de $M_{4,h}$: $Y_{4,h} = \left(-\frac{b}{h} + \left(1 - \frac{1}{h}\right)t\right) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_4 : $X_1 = x - y$ $X_2 = \frac{y(x - y)}{x + b}$

5. Objectes associats a la recurrència $u_{n+2} = \frac{bu_{n+1}+u_n u_{n+1}}{u_{n+1}+b}$ amb $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Aplicació associada: $F_5(x, y) = \left(y, \frac{by + xy}{y + b}\right)$	Integral primera: $V_5(x, y) = y(x + b)$	Parametrització de $C_{5,h}$: $P_{5,h}(t) = \left(t, \frac{h}{t + b}\right)$
Aplicació de Möbius: $M_{5,h}(t) = \frac{h}{t + b}$	Simetria de Lie de $M_{5,h}$: $Y_{5,h} = (-h + bt + t^2) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_5 : $X_1 = (x - y)(b + x)$ $X_2 = -y(x - y)$

Notem que la recurrència (1.6.1) estudiada a la Secció 1.6, es correspon amb la que acabem de donar quan $b = 1$.

6. Objectes associats a la recurrència $u_{n+2} = \frac{bu_n - bu_{n+1} + u_n u_{n+1}}{u_{n+1}}$ amb $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Aplicació associada: $F_6(x, y) = \left(y, \frac{bx - by + xy}{y}\right)$	Integral primera: $V_6(x, y) = x(y + b)$	Parametrització de $C_{6,h}$: $P_{6,h}(t) = \left(t, \frac{-bt + h}{t}\right)$
Aplicació de Möbius: $M_{6,h}(t) = \frac{-bt + h}{t}$	Simetria de Lie de $M_{6,h}$: $Y_{6,h} = (-h + bt + t^2) \frac{\partial}{\partial t}$	Simetria de Lie de F_6 : $X_1 = x(x - y)$ $X_2 = -(x - y)(y + b)$

1.7.2 Conjugacions al conjunt de les aplicacions de Palladino

En aquesta secció aplicarem els resultats de la Proposició 1.3.8 per detectar les conjugacions existents entre el conjunt de les aplicacions de Palladino, tot obtenint:

Proposició 1.7.1. (a) Les aplicacions F_1 , F_2 , F_5 i F_6 són birracionalment conjugades.

(b) Les aplicacions F_3 i F_4 són birracionalment conjugades.

(c) Qualsevol aplicació del conjunt $\{F_1, F_2, F_5, F_6\}$ no és conjugada a cap de les aplicacions $\{F_3, F_4\}$, mitjançant una conjugació que sigui una correspondència entre les respectives fibracions invariants $\{C_{j,h}\}$.

Demostració. (a) Un càlcul ens permet trobar que les aplicacions $M_{1,h}$ i $M_{2,k}$ definides en la secció anterior són conjugades via

$$m_h(t) = \frac{h}{b(b^2t + b - h)}$$

amb la correspondència entre els conjunts de nivell donada per

$$k = f(h) := -\frac{b^3 - h}{h}.$$

Per tant, usant l'Equació (1.3.7) de la Proposició 1.3.8, obtenim que $F_1 = \Psi^{-1}F_2\Psi$, on

$$\Psi(x, y) = \Psi(x, y) = P_{2,f(h)} \circ m_h \circ P_{1,h}^{-1}(x, y)|_{h=V_1(x,y)} = \left(-\frac{by+1}{b}, -\frac{bx+1}{b(bx-by+1)} \right),$$

i

$$\Psi^{-1}(x, y) = P_{1,f^{-1}(k)} \circ m_{f^{-1}(k)} \circ P_{2,k}^{-1}(x, y)|_{k=V_2(x,y)} = \left(-\frac{b^2xy+2by+1}{b(by+1)}, -\frac{bx+1}{b} \right).$$

De manera anàloga, les aplicacions $M_{2,h}$ i $M_{5,k}$ són conjugades via l'aplicació $m_h(t) = -1/(t+b)$, amb la correspondència donada per $k = f(h) := h-1$. Per tant $F_2 = \Psi^{-1}F_5\Psi$, on $\Psi(x, y) = (-(bx+1)/x, -(by+1)/y)$, i $\Psi^{-1}(x, y) = (-1/(x+b), -1/(y+b))$.

Les aplicacions $M_{6,h}$ i $M_{5,k}$ són conjugades via l'aplicació $m_h(t) = -h/t$ amb la correspondència donada per $k = f(h) = h$. Altre cop, obtenim $F_6 = \Psi^{-1}F_5\Psi$ amb $\Psi(x, y) = (-y-b, -x(y+b)/y)$, i $\Psi^{-1}(x, y) = (-y(x+b)/x, -x-b)$.

(b) Les aplicacions $M_{3,h}$ i $M_{4,k}$ són conjugades via l'aplicació $m_h(t) = bt/((h-1)t-b)$ amb la correspondència $k = f(h) = h$, per tant $F_3 = \Psi^{-1}F_4\Psi$ amb

$$\Psi(x, y) = P_{4,f(h)} \circ m_h \circ P_{3,h}^{-1}(x, y)|_{h=V_3(x,y)} = \left(\frac{bx}{y-x}, \frac{-bxy}{(x-y)(y+b)} \right),$$

i $\Psi^{-1}(x, y) = (bxy/((x-y)(x+b)), by/(x-y))$.

(c) La demostració segueix de la Proposició 1.3.8, tenint en compte el fet que tot i que algunes de les aplicacions de Möbius M_i amb $i = 1, 2, 5, 6$, són conjugades a algunes de les aplicacions M_j amb $j = 3, 4$, per cap d'elles existeix una bijecció entre els conjunts de nivell de V_3 i V_4 , per tant no és possible de construir una conjugació entre les aplicacions del conjunt $\{F_1, F_2, F_5, F_6\}$ i les del conjunt $\{F_3, F_4\}$, via una conjugació que sigui una correspondència entre les respectives fibracions invariants associades. ■

1.7.3 Anàlisi de les recurrències de Palladino números 3 i 5

Com a conseqüència de la Proposició 1.7.1, les recurrències de Palladino números 1, 2, 5 i 6 per una banda, i les números 3 i 4 per l'altra, tenen la mateixa dinàmica des d'un punt de vista qualitatiu. A continuació, caracteritzarem la dinàmica d'un representant de cadascun dels conjunts de recurrències, per exemple estudiant les aplicacions M_3 i M_5 . Primerament, considerarem l'equació en diferències

$$u_{n+2} = \frac{b(u_{n+1} - u_n) + u_{n+1}^2}{u_n}, \text{ amb } b \in \mathbb{C}. \quad (1.7.1)$$

Per a cada condició inicial u_0, u_1 agafada dins el seu conjunt de bona definició $\Gamma \subset \mathbb{C}$, sigui $I = V_3(u_0, u_1) = (u_1 + b)/u_0$. Aleshores:

Proposició 1.7.2. *Sigui $\{u_n\}$ una solució de l'Equació (1.7.1) amb condició inicial u_0, u_1 a Γ , aleshores:*

- (a) *Si $|I| < 1$, aleshores la solució convergeix a $u = b/(I - 1)$.*
- (b) *Si $|I| > 1$ o $I = 1$ i $b \neq 0$, aleshores la solució no està fitada.*
- (c) *Si I és una arrel p -èsima de la unitat amb $I \neq 1$, aleshores la solució és p -periòdica.*
- (d) *Si $|I| = 1$ i I no és una arrel p -èsima de la unitat, aleshores $\{u_n\}$ és conjugada a una seqüència generada per una rotació irracional d'angle $\arg(I)$, i el conjunt de punts d'acumulació de $\{u_n\}$ és un cercle a \mathbb{C} amb centre $z = b/(I - 1)$ i radi $|u_0 - b/(I - 1)|$.*
- (e) *Si $I = 1$ i $b = 0$, aleshores la solució és constant.*

Demostració. La demostració segueix fàcilment, tenint en compte la forma particular de la família de parametritzacions $\{P_{3,h}\}$, d'on tenim que $u_n = M_{3,h}^n(u_0)$ per a $h = V_3(u_0, u_1)$. Ara, si $h = 1$, aleshores $M_{3,h}$ és la identitat si $b = 0$ i cada òrbita de $M_{3,1}$ no està fitada si $b \neq 0$. Si $h \neq 1$, aleshores $M_{3,h}$ té un únic punt fix $t_h := b/(h - 1)$. Aquest punt és un atractor global si $|h| < 1$, i un repulsor (i les òrbites no estan fitades) si $|h| > 1$. Si $|h| = 1$ amb $h \neq 1$ aleshores $M_{3,h}$ és conjugada a una rotació donada per $z \rightarrow h z$, amb $z \in \mathbb{C}$. ■

Considerem ara, l'equació en diferències

$$u_{n+2} = \frac{bu_{n+1} + u_n u_{n+1}}{u_{n+1} + b}, \text{ amb } b \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (1.7.2)$$

Per cada condició inicial u_0, u_1 agafada al conjunt de bona definició $\Gamma \subset \mathbb{C}$, sigui

$$t_j = t_j(u_0, u_1) := \frac{-b + (-1)^j \sqrt{b^2 + 4u_1(u_0 + b)}}{2} \text{ per } j = 1, 2$$

i

$$\xi = -\frac{\left(b + \sqrt{b^2 + 4u_1(u_0 + b)}\right)^2}{4u_1(u_0 + b)}.$$

Proposició 1.7.3. *Segui $\{u_n\}$ una solució de l'Equació (1.7.2) amb condició inicial u_0, u_1 a Γ , aleshores:*

- (a) *Quan $u_1(u_0 + b) = -b^2/4$, la solució convergeix a $u = -b/2$.*
- (b) *Quan $u_1(u_0 + b) \neq -b^2/4$, aleshores:*
 - (i) *Si $u_1 = u_0 = t_j$, per qualsevol $j = 1, 2$, aleshores la solució és constant.*
 - (ii) *Si $|\xi| < 1$, $u_0 \neq t_1$ i $u_1 \neq t_1$, aleshores la solució convergeix a $u = t_0$ i, si $|\xi| > 1$, $u_0 \neq t_0$ i $u_1 \neq t_0$, aleshores la solució convergeix a $u = t_1$.*
 - (iii) *Si $|\xi| = 1$, aleshores la solució és p -periòdica si ξ és una arrel p -èsima de la unitat, o bé és conjugada a una seqüència generada per una rotació irracional d'angle $\arg(\xi)$, i el conjunt de punts d'acumulació de $\{u_n\}$ és un conjunt homeomorf a \mathbb{S}^1 dins $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Demostració. La demostració és una aplicació directa de la Proposició 1.3.3 gràcies a la particular forma de les parametritzacions $P_{5,h}$, que ens donen que $u_n = M_{5,h}^n(u_0)$. ■

Capítol 2

Òrbites periòdiques de les aplicacions integrables que preserven fibracions el·líptiques, mitjançant la seva estructura de grup

2.1 Introducció. Dinàmica sobre corbes invariants mitjançant l'estructura de grup

En aquest capítol ens centrarem en l'estudi de les aplicacions que preserven una fibració de corbes algebraiques $\{C_h\}$ de gènere 1, amb el benentès que diem que una aplicació F preserva una fibració de corbes C_h , si cada corba C_h és invariant sota la iteració de F .

Una corba projectiva algebraica de gènere 1 també s'anomena *corba el·líptica*, i té una estructura de grup associada ([56, 87, 86]). Veurem que en el cas en què la corba $\{C_h\}$ estigui donada genèricament per corbes el·líptiques, aleshores l'estructura de grup de la fibració el·líptica caracteritza la dinàmica de qualsevol aplicació que la preserva.

En primer lloc, ens cal definir l'estructura de grup associada a una corba el·líptica $C \in \mathbb{CP}^2$, coneguda com la *llei de grup de la corda-tangent*. Donats dos punts P i Q a C es defineix la suma $P + Q$ de la següent manera:

1. Seleccionem un punt $\mathcal{O} \in C$ com l'element neutre de la suma interna.
2. Considerem la recta que passa pels punts P i Q (la recta tangent quan $P = Q$). Aquesta recta sempre interseca C en un únic punt, el tercer, el qual denotem com $P * Q$. Aquest fet succeeix, gràcies al fet que les corbes de gènere 1 sense singularitats són isomorfes a corbes *cúbiques*, [87, Proposició III.3.1].

3. El punt $P + Q$ es defineix aleshores com $\mathcal{O} * (P * Q)$ (veure la figura següent).

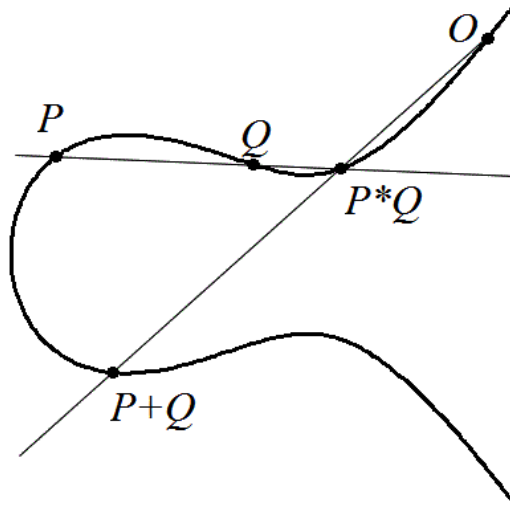


Figura 1. Representació gràfica de la suma de dos punts P i Q pertanyents a una corba el·líptica C .

Val a dir, que la corba dotada d'aquesta suma interna $(C, +, \mathcal{O})$ té una estructura de *grup abelià* [86].

Un breu comentari sobre la notació: típicament les corbes algebraiques es defineixen a \mathbb{K}^2 , o bé a $\mathbb{K}P^2$, on \mathbb{K} és el cos dels coeficients. En aquest capítol, aquest camp serà únicament \mathbb{R} o \mathbb{C} . La notació $C(\mathbb{K})$ denota una corba el·líptica C la qual té almenys un punt \mathcal{O} amb coordenades a \mathbb{K} .

La relació entre la dinàmica d'una aplicació birracional que preserva una corba el·líptica i la seva estructura de grup ve donada per la següent adaptació del resultat de Jogia, Roberts i Vivaldi [55, Teorema 3], al qual ens hi referirem com *Teorema JRV* d'ara endavant. A [55], el resultat és donat per a aplicacions birracionals que deixen invariant una corba el·líptica expressada en una certa forma normal de Weierstrass (veure [56, 87] però especialment [86, Secció I.3]). Aquesta adaptació s'obté ràpidament, tot fent ús de l'isomorfisme amb la seva forma normal.

Teorema 2.1.1 (Jogia, Roberts, Vivaldi, [55]). *Segui F una aplicació birracional sobre un cos \mathbb{K} , de característica diferent de 2 i 3, la qual preserva una corba el·líptica $C(\mathbb{K})$. Aleshores existeix un punt $Q \in C(\mathbb{K})$ de manera que l'aplicació es pot expressar en termes de la llei de grup, $+$, a $C(\mathbb{K})$ tal com*

- (i) $F|_{C(\mathbb{K})} : P \mapsto P + Q$, o bé
- (ii) $F|_{C(\mathbb{K})} : P \mapsto i(P) + Q$, on i és un automorfisme de possible ordre (període) 2, 4, 3 o 6, i l'aplicació F té el mateix ordre (període) que i .

Recordem que un automorfisme de $C(\mathbb{K})$ és un endomorfisme, és a dir un morfisme que respecta l'estructura de grup $(C, +, \mathcal{O})$, invertible. Els automorfismes de $C(\mathbb{K})$ estan caracteritzats a [87, Secció III.10], vegeu també [55]. Més endavant donarem una interpretació dinàmica del resultat que acabem d'enunciar, però primerament vegem un exemple.

Exemple 2.1.2. Considerem la família 1-paramètrica d'aplicacions birracionals *reals* de Lyness

$$F_a(x, y) = \left(y, \frac{a + y}{x} \right), \quad (2.1.1)$$

amb $a \in \mathbb{C}$ (notem que bona part de la literatura referida a aquestes aplicacions consideren el cas $a \geq 0$, vegeu [8, 10, 92] i també [48]). Les aplicacions F_a defineixen el sistema dinàmic associat a la recurrència $x_{n+2} = (a + x_{n+1})/x_n$. Cadascuna d'elles té com a integral primera

$$V_a(x, y) = \frac{(x+1)(y+1)(x+y+a)}{xy}, \quad (2.1.2)$$

per tant, preserva cada corba de la fibració donada per

$$\mathcal{F} = \{C_h = \{(x+1)(y+1)(x+y+a) - hxy = 0\}, h \in \mathbb{C}\}. \quad (2.1.3)$$

Quan s'estudia la dinàmica d'una aplicació integrable, un primer pas és conèixer la topologia del conjunt format per les corbes invariants de nivell. Quan aquests conjunts de nivell són corbes algebraiques, la manera natural d'estudiar-les és considerar la seva extensió, i també l'extensió de les aplicacions birracionals, a l'espai complex projectiu

$$\mathbb{CP}^2 = \{[x : y : z] \neq [0 : 0 : 0], x, y, z \in \mathbb{C}\} / \sim,$$

on $[x_1 : y_1 : z_1] \sim [x_2 : y_2 : z_2]$ si i només si $[x_1 : y_1 : z_1] = \lambda[x_2 : y_2 : z_2]$ per a $\lambda \neq 0$.

En aquest apartat $[x : y : 1]$ denota un punt afí, corresponent al punt $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, i $[x : y : 0]$ representa un punt infinit. Els punts infinits s'afegeixen a les corbes afins reals per tal de detectar les direccions asimptòtiques que prenen les possibles components no fitades (veure per exemple la Figura 1).

Qualsevol corba real algebraica afí es pot estendre a \mathbb{CP}^2 mitjançant el procés formal d'*homogenització*. En el nostre cas, qualsevol corba de Lyness

$$C_h = \{(x+1)(y+1)(x+y+a) - hxy = 0\}$$

s'estén a \mathbb{CP}^2 com

$$\widetilde{C}_h := \{(x+z)(y+z)(x+y+az) - hxyz = 0, x, y, z \in \mathbb{C}\}.$$

Fixem-nos també, que qualsevol aplicació birracional a \mathbb{C}^2 s'estén formalment a una aplicació polinòmica a \mathbb{CP}^2 . En el nostre cas, l'aplicació de Lyness $F_a(x, y) = (y, (a + y)/x)$ s'estén formalment a

$$\tilde{F}_a([x : y : z]) = [xy : az^2 + yz : xz],$$

excepte pels punts $[x : 0 : 0]$, $[0 : y : 0]$ i $[0 : -a : 1]$, on $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Aquestes corbes de Lyness \tilde{C}_h són el·líptiques excepte per $h \in \{0, a - 1, h_c^\pm\}$, on

$$h_c^\pm := \frac{2a^2 + 10a - 1 \pm (4a + 1)\sqrt{4a + 1}}{2a}. \quad (2.1.4)$$

Vegeu comentaris addicionals a la Secció 2.3.

Gràficament, per exemple, aquesta seria la figura corresponent a una típica corba de Lyness real $C_h = \{(x + 1)(y + 1)(x + y + a) - hxy = 0\}$, per $a > 0$ i $h > h_c^+$.

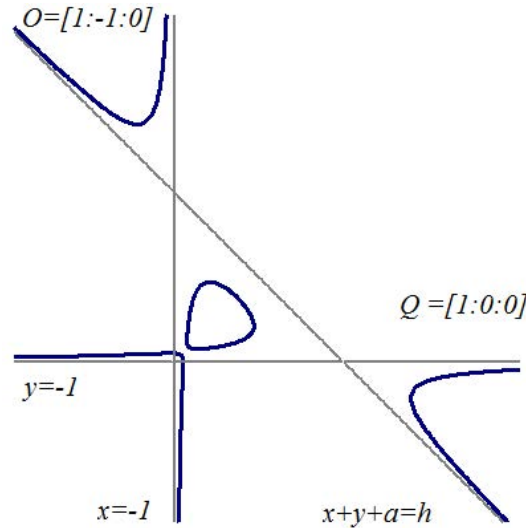


Figura 2. Representació d'una corba de Lyness real C_h , per $a > 0$ i $h > h_c^+$.

Un fet interessant és que per a tots els valors de h , les corbes \tilde{C}_h contenen els punts de l'infinit $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[1 : -1 : 0]$ (veure l'anterior figura). Operacions senzilles (o una interpretació geomètrica) mostren que, considerant $\mathcal{O} := [1 : -1 : 0]$, per a qualsevol nivell el·líptic h l'aplicació $\tilde{F}_a([x : y : z]) = [xy : az^2 + yz : xz]$ es pot escriure com:

$$\tilde{F}_{a|\tilde{C}_h}([x : y : z]) = [x : y : z] + [1 : 0 : 0].$$

Els nivells no el·líptics corresponen a punts aïllats o bé a corbes que factoritzen en corbes de gènere 0, i sobre aquests nivells l'aplicació $\tilde{F}_{a|\tilde{C}_h}$ és conjugada a una transformació de Möbius, veure [48, Secció 3.1].

Exemple 2.1.3. Considerem ara les aplicacions que resulten de la composició de dues aplicacions de Lyness, obtenint la família 2-paramètrica d'aplicacions birracionals

$$F_{b,a}(x, y) := \left(\frac{a+y}{x}, \frac{a+bx+y}{xy} \right), \quad (2.1.5)$$

amb $a, b \in \mathbb{C}$ tal que $a \cdot b \neq 0$. Notem que típicament aquestes aplicacions s'estudien per $a > 0$ i $b > 0$ (veure [9, 28, 57]), i que les anomenarem *aplicacions de Lyness 2-periòdiques* degut al fet que les aplicacions $F_{b,a}$ són les *aplicacions de composició* [28], associades a l'equació en diferències 2-periòdica

$$u_{n+2} = \frac{a_n + u_{n+1}}{u_n},$$

on

$$a_n = \begin{cases} a & \text{per } n = 2\ell + 1, \\ b & \text{per } n = 2\ell. \end{cases}$$

Quan $ab \neq 0$, cadascuna de les aplicacions $F_{b,a}$ té com a integral primera

$$V_{b,a}(x, y) = \frac{(bx+a)(ay+b)(ab+ax+by)}{xy}, \quad (2.1.6)$$

i per tant, preserva cada corba de la fibració donada per

$$\mathcal{F} = \{C_h := \{(bx+a)(ay+b)(ax+by+ab) - hxy = 0\}, h \in \mathbb{C}\}. \quad (2.1.7)$$

Considerem també l'extensió d'aquestes corbes algebraiques i les de les aplicacions birracionals, a l'espai complex projectiu mitjançant el procés formal d'*homogenització*. En el nostre cas, les corbes C_h en coordenades homogènies $[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2$ s'escriuen com

$$\widetilde{C}_h := \{(bx+az)(ay+bz)(ax+by+abz) - hxyz = 0, x, y, z \in \mathbb{C}\},$$

i l'aplicació $F_{b,a}$ a \mathbb{R}^2 s'estén formalment a una aplicació polinòmica a \mathbb{CP}^2 com

$$\widetilde{F}_{b,a}([x : y : z]) = [ayz + y^2 : az^2 + bxz + yz : xy], \quad (2.1.8)$$

excepte pels punts $[x : 0 : 0]$, $[-a : 0 : b]$ i $[0 : -a : 1]$, on $x, y, z \in \mathbb{C}$.

Les corbes \widetilde{C}_h són el·líptiques quan $ab \neq 0$, i per tots els valors de h excepte quan $h = 0$ o bé quan h és la solució de la quàrtica

$$h^4 + p_3(a, b)h^3 + p_2(a, b)h^2 + p_1(a, b)h + p_0(a, b) = 0, \quad (2.1.9)$$

on els coeficients $p_3(a, b)$, $p_2(a, b)$, $p_1(a, b)$ i $p_0(a, b)$ venen donats per:

$$\begin{aligned} p_3(a, b) &= -4a^2b^2 - 4a^3 - 4b^3 + ab, \\ p_2(a, b) &= 6a^4b^4 + 4a^5b^2 + 4a^2b^5 + 6a^6 - 21a^3b^3 + 6b^6 - 3a^4b - 3ab^4, \\ p_1(a, b) &= -4a^6b^6 + 4a^7b^4 + 4a^4b^7 + 4a^8b^2 - 25a^5b^5 + 4a^2b^8 - 4a^9 \\ &\quad + 18a^6b^3 + 18a^3b^6 - 4b^9 + 3a^7b - 21a^4b^4 + 3ab^7, \\ p_0(a, b) &= (-b^2 + a)(a^2 - b)(-a^2b^2 + a^3 + b^3)^3, \end{aligned}$$

vegeu comentaris addicionals a la Secció 2.3.

Fixem-nos que per a tots els valors de h , les corbes \widetilde{C}_h contenen els punts de l'infinit $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[b : -a : 0]$ (els quals no són punts d'inflexió). Novament, uns càlculs senzills mostren que, considerant $\mathcal{O} := [0 : 1 : 0]$, per a qualsevol nivell el·líptic h l'aplicació (2.1.8) es pot escriure com:

$$\widetilde{F}_{b,a|\widetilde{C}_h}([x : y : z]) = [x : y : z] + [1 : 0 : 0].$$

Acabem de veure que pels dos exemples anteriors, les aplicacions F són tals que sobre cada corba el·líptica C_h es té

$$F|_{C_h} : P \mapsto P + Q. \quad (2.1.10)$$

És a dir, que la dinàmica sobre cada nivell el·líptic ve descrita pel cas (i) del Teorema JRV (Teorema 2.1.1), i on el punt Q és el mateix per totes les corbes C_h . Aquesta és una situació habitual (vegeu [9, 10, 13, 41, 55, 92]). Quan la dinàmica sobre una corba invariant ve donada per l'expressió (2.1.10), el Teorema JRV té la següent interpretació dinàmica:

Corol·lari 2.1.4. *Sigui F una aplicació birracional que preserva una corba el·líptica real $C_h \subset \mathbb{R}^2$, tal que existeix un punt $Q \in C_h$ de manera que $F|_{C_h} : P \mapsto P + Q$. Aleshores, o bé $F|_{C_h}$ és conjugada a una rotació, o bé ho és $F|_{C_h}^2$.*

El resultat anterior es pot demostrar fent servir el següent resultat que afirma que tota corba el·líptica real (afegint si cal punts de l'infinit del projectiu real) es pot veure com a una o dues corbes tancades simples, i que la seva operació de grup es pot representar com l'operació usual dels grups de Lie \mathbb{S}^1 o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$, vegeu el Corol·lari 2.3.1 de [85, Capítol V.2, pàgina 420].

Proposició 2.1.5. *Existeix un isomorfisme continu entre cada corba el·líptica no-singular $(C(\mathbb{R}), +, \mathcal{O})$ i, o bé el grup de Lie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2) = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi)\} \times \{1, -1\}$ quan $\Delta(C) > 0$, amb l'operació $(u, v) \cdot (z, w) = (uz, vw)$; o bé $\mathbb{S}^1 = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$ quan $\Delta(C) < 0$, amb l'operació donada per $u \cdot z = uz$, i on $\Delta(C)$ és el discriminant de l'equació de Weierstrass associada a $C(\mathbb{R})^*$.*

Demostració de la Corol·lari 2.1.4. Suposem que existeix un isomorfisme continu de grups φ entre C_h i $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$ (quan $C_h \cong \mathbb{S}^1$ es procedeix anàlogament). Sigui $\tilde{F} = \varphi \circ F|_{C_h} \circ \varphi^{-1} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$, i denotem $\tilde{P} = \varphi(P) = (e^{i\theta}, v)$ i $\tilde{Q} = \varphi(Q) = (e^{i\alpha}, w)$, on $v, w \in \{-1, 1\}$. Aleshores, donat que φ és un homomorfisme de grups

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{P}) &= \varphi \circ F|_{C_h} \circ \varphi^{-1}(\tilde{P}) = \varphi \circ F|_{C_h}(P) = \varphi(P + Q) = \varphi(P) \cdot \varphi(Q) \\ &= (e^{i\theta}, v) \cdot (e^{i\alpha}, w) = (e^{i(\theta+\alpha)}, vw). \end{aligned}$$

*Vegeu la Secció 2.3 per més informació sobre el discriminant.

Si $\text{sign}(vw) = \text{sign}(v)$, aleshores $F|_{C_h}$ és conjugada a la rotació $z \rightarrow e^{i\alpha}z$. En cas contrari, tenim $\tilde{F}^2(\tilde{P}) = (e^{i(\theta+2\alpha)}, vw^2) = (e^{i(\theta+2\alpha)}, v)$, i per tant $F|_{C_h}^2$ és conjugada a la rotació $z \rightarrow e^{i2\alpha}z$. ■

Fixem-nos que si F és una aplicació birracional preservant una corba el·líptica $(C, +, \mathcal{O})$ amb dinàmica corresponent al cas (ii) del Teorema 2.1.1, aleshores tots els punts sobre C donen lloc a òrbites periòdiques. Si la dinàmica es correspon amb el cas (i), aleshores $F|_C^n(P) = P + nQ$, i llavors s'observa que P dona lloc a òrbites p -periòdiques si i només si

$$pQ = \mathcal{O}. \quad (2.1.11)$$

En altres paraules, en el cas (i) del Teorema 2.1.1 la corba és plena d'òrbites periòdiques de F si i només si Q és un punt *d'ordre finit* del grup $(C, +, \mathcal{O})$, també anomenat punt de *torsió*.

2.2 Exemple de càlcul del lloc geomètric de les òrbites periòdiques.

En aquest apartat, com a aplicació senzilla de la caracterització de les òrbites periòdiques donada per l'Equació (2.1.11), trobarem el lloc geomètric de les corbes que tenen òrbites periòdiques amb un període establert. Considerarem les aplicacions donades als Exemples 2.1.2 i 2.1.3. Aquest enfocament es va fer servir a [10, 48] i [92] per estudiar les aplicacions de Lyness i, per descomptat es pot fer servir per d'altres aplicacions integrables que preserven fibracions el·líptiques.

2.2.1 Aplicació de Lyness.

Tal i com hem comentat abans, les corbes de Lyness $C_h = \{(x+1)(y+1)(x+y+a) - hxy = 0\}$ són corbes el·líptiques per a $h \notin \{0, a-1, h_c^\pm\}$, on h_c^\pm ve donat per (2.1.4). En el cas real, aquestes corbes, quan afegim els punts de l'infinit $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[1 : -1 : 0]$ són isomorfes a \mathbb{S}^1 o bé $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$. Considerant $\mathcal{O} := [1 : -1 : 0]$, sobre cada corba el·líptica C_h , la dinàmica de l'aplicació de Lyness (2.1.1) és

$$F_{a|C_h}([x : y : 1]) = [x : y : 1] + [1 : 0 : 0].$$

L'equació (2.1.11) ens dona un mètode simple per a trobar el lloc geomètric de les òrbites periòdiques d'un determinat període a les corbes el·líptiques. Recordem que, pels nivells el·líptics, si es verifica l'Equació (2.1.11) aleshores la corba està plena de punts p -periòdics. Per tant, caracteritzar els continus d'òrbites periòdiques és equivalent a trobar quines són les relacions entre a i h per les quals es verifica que $pQ = \mathcal{O}$, és a dir:

$$p \cdot [1 : 0 : 0] = [1 : -1 : 0]. \quad (2.2.1)$$

El treball amb aquesta equació, ens condueix al següent resultat que sintetitza altres resultats que es poden trobar a [8, 10, 48] i [92].

Proposició 2.2.1. *Es verifiquen els següents resultats:*

- (i) *Les aplicacions F_0 i F_1 són globalment periòdiques amb període 6 i 5 respectivament.*
- (ii) *Si $a(a-1) \neq 0$ aleshores no hi ha corbes el·líptiques C_h amb òrbites periòdiques corresponents a les aplicacions de Lyness F_a amb període $p \in \{1, \dots, 6\}$.*
- (iii) *Si $a(a-1) \neq 0$ les corbes el·líptiques C_h plenes de punts periòdics de les aplicacions de Lyness F_a amb períodes $p \in \{7, \dots, 12\}$, venen donades per aquells valors de a i h_p tals que $h_p \notin \{0, a-1, h_c^\pm\}$, on:*

$$\begin{aligned} h_7 &= (a-1)/a, \\ h_8 &= -(a-1)^2/a, \\ h_9 &= (a-1)(a^2-a+1)/a, \\ h_{10} &= (a-1)/(a(a+1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{11} &= (a-1)(2a-1 \pm \sqrt{4a^3-4a^2+1})/(2a^2), \text{ en el cas real,} \\ &\text{només existeix per } a > a_*, \\ h_{12} &= (a-1)(-a+3 \pm \sqrt{-3a^2+2a+1})/(2a) \text{ en el cas real,} \\ &\text{només existeix per } a \in [-1/3, 1], \end{aligned}$$

on $a_* \simeq -0.41964$ és l'única arrel real de $4a^3-4a^2+1$.

Nota. Quan considerem $a \in \mathbb{R}$ i l'aplicació definida a \mathbb{R}^2 , els càlculs dels valors de h_p a l'enunciat (iii) de l'anterior resultat són formals. Per tant, pot passar que per a determinats valors de a , les corbes C_{h_p} siguin buides a \mathbb{R}^2 .

Demostració de la Proposició 2.2.1. Considerem els punts $Q = [1 : 0 : 0]$ i $\mathcal{O} = [1 : -1 : 0]$ que pertanyen a totes les corbes el·líptiques $(C_h, +, \mathcal{O})$. Observem que donat qualsevol punt $P \in C_h$, el punt $P + Q$ s'obté com

$$P + Q = (P * Q) * \mathcal{O}.$$

Observem ara que:

1. Per calcular $[x : y : 1] = [x_0 : y_0 : 1] * Q$ només cal substituir $y = y_0$ a l'expressió de C_h i trobar el valor de x que verifica l'equació. Tenint en compte això, els càlculs que apareixen als diferents apartats de la demostració s'obtenen simplement resolent aquesta equació amb l'ajuda de software de computació simbòlica, quan sigui necessari.

Observem també que donat que Q és tangent a l'asíptota de C_h , $y = -1$, el punt $Q * Q$ s'obté tot substituint $y = -1$ a l'expressió de C_h i resolent la corresponent equació.

2. Com que C_h és simètrica respecte de la recta $y = x$, tenim que $[x : y : z] * \mathcal{O} = [y : x : z]$.

(i) Si $a = 0$, aleshores amb càlculs senzills obtenim:

$$\begin{aligned} Q * Q &= [0 : -1 : 1] \Rightarrow 2Q := [0 : -1 : 1] * \mathcal{O} = [-1 : 0 : 1]; \\ 2Q * Q &= [0 : 0 : 1] \Rightarrow 3Q := [0 : 0 : 1] * \mathcal{O} = [0 : 0 : 1]; \\ 3Q * Q &= [-1 : 0 : 1] = 2Q \Rightarrow 4Q := 2Q * \mathcal{O} = [0 : -1 : 1]; \\ 4Q * Q &= Q \Rightarrow 5Q := Q * \mathcal{O} = [0 : 1 : 0] \text{ i finalment ,} \\ 5Q * Q &= \mathcal{O} \Rightarrow 6Q := \mathcal{O} * \mathcal{O} = \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Per tant, acabem comprovant que l'aplicació de Lyness F_0 és globalment 6-periòdica.

Si $a = 1$ aleshores, procedint de forma anàloga tenim:

$$\begin{aligned} Q * Q &= [0 : -1 : 1] \Rightarrow 2Q := [0 : -1 : 1] * \mathcal{O} = [-1 : 0 : 1]; \\ 2Q * Q &= 2Q \Rightarrow 3Q := 2Q * \mathcal{O} = [0 : -1 : 1]; \\ 3Q * Q &= Q \Rightarrow 4Q := Q * \mathcal{O} = [0 : 1 : 0] \text{ i finalment ,} \\ 4Q * Q &= \mathcal{O} \Rightarrow 5Q := \mathcal{O} * \mathcal{O} = \mathcal{O}, \end{aligned}$$

per tant, l'aplicació F_1 és globalment 5-periòdica.

(ii) i (iii) Assumim ara que $a(a - 1) \neq 0$ i apliquem les regles formals explicades al preàmbul de la demostració per calcular la suma interna d'elements de la forma $Q + nQ$, tot obtenint els següents resultats:

$$\begin{aligned} Q &= [1 : 0 : 0], \\ 2Q &= [-1 : 0 : 1], \\ 3Q &= [0 : -a : 1], \\ 4Q &= \left[-a : \frac{ah - a + 1}{a - 1} : 1 \right], \\ 5Q &= \left[\frac{ah - a + 1}{a - 1} : \frac{-a^2 - ah + 2a - 1}{a(a - 1)} : 1 \right], \\ 6Q &= \left[\frac{-a^2 - ah + 2a - 1}{a(a - 1)} : \frac{a^3 - 2a^2 - ah + 2a - 1}{a(ah - a + 1)} : 1 \right], \\ 7Q &= \left[\frac{a^3 - 2a^2 - ah + 2a - 1}{a(ah - a + 1)} : -\frac{(a - 1)^2 (a^2 h + ah - a + 1)}{(a^2 + ah - 2a + 1)(ah - a + 1)} : 1 \right]. \end{aligned}$$

Notem que cal interpretar aquestes expressions formals dels punts nQ com a punts afins en el cas que els denominadors de les diferents coordenades siguin no nuls, i com a punts de la recta de l'infinit altrament.

Per tant, a partir de l'Equació (2.2.1) és fàcil de veure que no hi ha òrbites periòdiques sobre els nivells el·líptics per a $p = 1, 2, 3, 4$ i, assumint que $a(a-1) \neq 0$, tampoc n'hi ha per a $p = 5$ i 6 , perquè aquests punts pQ són afins.

Fixem-nos que $7Q$ pot ser un punt de l'infinit només si $a^2 + ah - 2a + 1 = 0$ o bé $ah - a + 1 = 0$. El primer cas, ens dóna fàcilment que $7Q \neq \mathcal{O}$, i el segon cas ens dóna directament que $7Q = [a(a-1)^3 : -a(a-1)^3 : 0] = \mathcal{O}$, així doncs

$$h_7 := \frac{a-1}{a}.$$

Per obtenir els altres períodes, podem imposar les relacions $4Q = -4Q$ (període 8); $4Q = -5Q$ (període 9); $5Q = -5Q$ (període 10); $6Q = -5Q$ (període 11); i $7Q = -5Q$ (període 12). Els punts $-nQ$ s'obtenen a partir dels punts nQ , només cal tenir present que per qualsevol punt P sobre una corba de Lyness C_h , el punt $-P$ és justament el punt de C_h simètric de P respecte de l'eix $y = x$, això es segueix del fet que en general $-P = P * (\mathcal{O} * \mathcal{O})$, vegeu [86, pàgina 18], tenint en compte que en el nostre cas $\mathcal{O} * \mathcal{O} = \mathcal{O}$, i també la simetria de la corba respecte de l'eix $y = x$.

Per tant, dels càlculs anteriors obtenim fàcilment:

$$\begin{aligned} -Q &= [0 : 1 : 0], \\ -2Q &= [0 : -1 : 1], \\ -3Q &= [-a : 0 : 1], \\ -4Q &= \left[\frac{ah - a + 1}{a - 1} : -a : 1 \right], \text{ i} \\ -5Q &= \left[\frac{-a^2 - ah + 2a - 1}{a(a-1)} : \frac{ah - a + 1}{a - 1} : 1 \right]. \end{aligned}$$

Vegem, per exemple com s'obtenen les corbes el·líptiques contenint òrbites 9-periòdiques. Si impossem que $4Q = -5Q$, obtenim que $-a = (-a^2 - ah + 2a - 1)/(a(a-1))$. Aquesta igualtat ens proporciona

$$h_9 := \frac{(a-1)(a^2 - a + 1)}{a}.$$

Per tenir nivells el·líptics amb òrbites de període 12, impossem que $7Q = -5Q$ i obtenim

$$\begin{cases} \frac{a^3 - 2a^2 - ah + 2a - 1}{(ah - a + 1)a} = -\frac{a^2 + ah - 2a + 1}{a(a-1)}, \\ -\frac{(a-1)^2(a^2h + ah - a + 1)}{(a^2 + ah - 2a + 1)(ah - a + 1)} = \frac{ah - a + 1}{a-1}. \end{cases}$$

A partir d'aquestes equacions, veiem que h_{12} ha de venir donat per les arrels del polinomi $P(a, h) = a^2h^2 + a(a-1)(a-3)h + (a^2 - 2a + 2)(a-1)^2$, el qual ens dóna el resultat.

Els altres casos s'obtenen de manera similar. ■

Finalment, cal remarcar que hi ha valors de a per als quals, els nivells no el·líptics (els quals corresponen a corbes de gènere 0) estan plens d'òrbites periòdiques amb períodes 1, 2 i 3, [48, Lema 5]. Altrament, també cal dir que no hi ha aplicacions de Lyness amb òrbites 4-periòdiques, encara que hi ha alguns autors que consideren que aquest període apareix en el cas $a = +\infty$, [92].

2.2.2 Aplicació de Lyness 2-periòdica.

Les corbes corresponents a l'aplicació de Lyness 2-periòdica $C_h = \{(bx + a)(ay + b)(ax + by + ab) - hxy = 0\}$ amb $ab \neq 0$, són corbes el·líptiques per a $h \neq 0$ i per h diferent de la solució donada per l'Equació (2.1.9). En el cas real, aquestes corbes, quan afegim els punts de l'infinit $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[b : -a : 0]$ són isomorfs a \mathbb{S}^1 o bé $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}/(2)$. Considerant $\mathcal{O} := [0 : 1 : 0]$, sobre cada corba el·líptica C_h , la dinàmica de l'aplicació de Lyness (2.1.5) és

$$F_{b,a}|_{C_h}([x : y : 1]) = [x : y : 1] + [1 : 0 : 0].$$

Com a l'exemple anterior, l'equació (2.1.11) ens dóna un mètode simple per a trobar el lloc geomètric de les òrbites periòdiques d'un determinat període a les corbes el·líptiques. Per tant, per caracteritzar els continus d'òrbites periòdiques trobarem les relacions entre a , b i h per a les quals es verifica que $pQ = \mathcal{O}$, en aquest cas:

$$p \cdot [1 : 0 : 0] = [0 : 1 : 0]. \quad (2.2.2)$$

Proposició 2.2.2. *Es verifiquen els següents resultats:*

- (i) *L'aplicació $F_{1,1}$ és globalment periòdica amb període 5.*
- (ii) *No hi ha corbes el·líptiques C_h plenes de punts periòdics de les aplicacions de Lyness 2-periòdiques $F_{b,a}$ amb períodes $p = 2, 3$.*
- (iii) *Les corbes el·líptiques C_h plenes de punts periòdics de les aplicacions de Lyness 2-periòdiques $F_{b,a}$ amb períodes $p \in \{4, \dots, 14\}$, venen donades per aquells valors de a, b i $h_p \neq 0$ tals que no són solució de l'Equació (2.1.9); i es verifica $c_p(a, b, h_p) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} c_4(a, b, h) &:= h - AB, \\ c_5(a, b, h) &:= (ab - 1)h + AB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_6(a, b, h) &:= h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h \\
 &\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab), \\
 c_7(a, b, h) &:= -h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\
 &\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3, \\
 c_8(a, b, h) &:= h^3 + (-2a^3 - 2b^3 + 5ab - 1)h^2 \\
 &\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 4ab + 2)h - B^2A^2, \\
 c_9(a, b, h) &:= -h^5 + (-4a^2b^2 + 5a^3 + 5b^3 - 6ab)h^4 \\
 &\quad + (a^5b^5 - 10a^4b^4 + 17a^5b^2 + 17a^2b^5 - 10a^6 - 38a^3b^3 \\
 &\quad - 10b^6 + 24a^4b + 24ab^4 - 15a^2b^2)h^3 + BA(10a^4b^4 - 17a^5b^2 \\
 &\quad - 17a^2b^5 + 10a^6 + 37a^3b^3 + 10b^6 - 26a^4b - 26ab^4 + 19a^2b^2)h^2 \\
 &\quad - (4a^4b^4 - 9a^5b^2 - 9a^2b^5 + 5a^6 + 20a^3b^3 + 5b^6 - 14a^4b \\
 &\quad - 14ab^4 + 12a^2b^2)B^2A^2h + (a^4b^4 - 2a^5b^2 - 2a^2b^5 + a^6 \\
 &\quad + 5a^3b^3 + b^6 - 3a^4b - 3ab^4 + 3a^2b^2)B^3A^3, \\
 c_{10}(a, b, h) &:= (-ab - 1)h^5 + (-a^3b^3 + 4a^4b + 4ab^4 - 12a^2b^2 + 5a^3 + 5b^3 \\
 &\quad - 5ab)h^4 + (-a^5b^5 + 6a^6b^3 + 6a^3b^6 - 6a^7b - 35a^4b^4 - 6ab^7 \\
 &\quad + 41a^5b^2 + 41a^2b^5 - 10a^6 - 56a^3b^3 - 10b^6 + 20a^4b + 20ab^4 \\
 &\quad - 10a^2b^2)h^3 + BA(a^5b^5 - 5a^6b^3 - 5a^3b^6 + 4a^7b + 30a^4b^4 + 4ab^7 \\
 &\quad - 37a^5b^2 - 37a^2b^5 + 10a^6 + 55a^3b^3 + 10b^6 - 20a^4b - 20ab^4 \\
 &\quad + 10a^2b^2)h^2 - (a^5b^5 - 2a^6b^3 - 2a^3b^6 + a^7b + 12a^4b^4 + ab^7 \\
 &\quad - 15a^5b^2 - 15a^2b^5 + 5a^6 + 25a^3b^3 + 5b^6 - 10a^4b - 10ab^4 \\
 &\quad + 5a^2b^2)B^2A^2h + B^5A^5, \\
 c_{11}(a, b, h) &:= h^8 + (4b^2a^2 - 7a^3 - 7b^3 + 10ba)h^7 + (10a^4b^4 - 27a^5b^2 \\
 &\quad - 27a^2b^5 + 21a^6 + 78a^3b^3 + 21b^6 - 60ba^4 - 60b^4a \\
 &\quad + 45b^2a^2 - ba)h^6 + (-a^7b^7 + 20a^6b^6 - 57a^7b^4 - 57a^4b^7 + 75a^8b^2 \\
 &\quad + 213a^5b^5 + 75a^2b^8 - 35a^9 - 309a^6b^3 - 309a^3b^6 - 35b^9 + 150a^7b \\
 &\quad + 460a^4b^4 + 150ab^7 - 225a^5b^2 - 225a^2b^5 + 104a^3b^3 + 6ba^4 \\
 &\quad + 6b^4a - 6b^2a^2)h^5 + BA(-20a^6b^6 + 57a^7b^4 + 57a^4b^7 - 75a^8b^2 \\
 &\quad - 207a^5b^5 - 75a^2b^8 + 35a^9 + 321a^6b^3 + 321a^3b^6 + 35b^9 - 165a^7b \\
 &\quad - 534a^4b^4 - 165ab^7 + 285a^5b^2 + 285a^2b^5 - 140a^3b^3 - 15ba^4 \\
 &\quad - 15b^4a + 15b^2a^2)h^4 - (-10a^6b^6 + 37a^7b^4 + 37a^4b^7 - 48a^8b^2 \\
 &\quad - 139a^5b^5 - 48a^2b^8 + 21a^9 + 213a^6b^3 + 213a^3b^6 + 21b^9 - 108a^7b \\
 &\quad - 381a^4b^4 - 108ab^7 + 213a^5b^2 + 213a^2b^5 - 106a^3b^3 - 20ba^4 \\
 &\quad - 20b^4a + 20b^2a^2)B^2A^2h^3 + (-4a^6b^6 + 15a^7b^4 + 15a^4b^7 - 18a^8b^2 \\
 &\quad - 60a^5b^5 - 18a^2b^8 + 7a^9 + 84a^6b^3 + 84a^3b^6 + 7b^9 - 39a^7b \\
 &\quad - 154a^4b^4 - 39ab^7 + 87a^5b^2 + 87a^2b^5 - 40a^3b^3 - 15ba^4 \\
 &\quad - 15b^4a + 15b^2a^2)B^3A^3h^2 - (a^4b^4 - 2a^5b^2 - 2a^2b^5 + a^6 + 7a^3b^3 \\
 &\quad + b^6 - 5ba^4 - 5b^4a + 10b^2a^2 - 6ba)B^5A^5h - baB^6A^6,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(a, b, h) : &= -h^7 + (a^4b^4 - 8a^2b^2 + 7a^3 + 7b^3 - 7ab)h^6 + (-3a^7b^4 - 3a^4b^7 \\
&+ 12a^5b^5 - 36a^4b^4 + 47a^5b^2 + 47a^2b^5 - 21a^6 - 84a^3b^3 - 21b^6 \\
&+ 42a^4b + 42ab^4 - 22a^2b^2)h^5 + BA(3a^7b^4 + 3a^4b^7 - 21a^5b^5 \\
&+ 75a^4b^4 - 80a^5b^2 - 80a^2b^5 + 35a^6 + 130a^3b^3 + 35b^6 - 70a^4b \\
&- 70ab^4 + 40a^2b^2)h^4 - (-a^6b^6 + a^7b^4 + a^4b^7 - 10a^5b^5 + 75a^4b^4 \\
&- 80a^5b^2 - 80a^2b^5 + 35a^6 + 120a^3b^3 + 35b^6 - 70a^4b - 70ab^4 \\
&+ 45a^2b^2)B^2A^2h^3 + (36a^4b^4 - 47a^5b^2 - 47a^2b^5 + 21a^6 + 69a^3b^3 \\
&+ 21b^6 - 42a^4b - 42ab^4 + 31a^2b^2)B^3A^3h^2 - (8a^4b^4 - 15a^5b^2 \\
&- 15a^2b^5 + 7a^6 + 24a^3b^3 + 7b^6 - 14a^4b - 14ab^4 + 12a^2b^2)B^4A^4h \\
&+ (a^4b^4 - 2a^5b^2 - 2a^2b^5 + a^6 + 4a^3b^3 + b^6 - 2a^4b - 2ab^4 \\
&+ 2a^2b^2)B^5A^5, \\
c_{13}(a, b, h) &:= abh^{11} + (4a^3b^3 - 9a^4b - 9ab^4 + 15a^2b^2 - 1)h^{10} + (10a^5b^5 \\
&- 37a^6b^3 - 37a^3b^6 + 36a^7b + 133a^4b^4 + 36ab^7 - 120a^5b^2 - 120a^2b^5 \\
&+ 105a^3b^3 - 16a^2b^2 + 10a^3 + 10b^3 - 10ab)h^9 + (20a^7b^7 - 87a^8b^5 \\
&- 87a^5b^8 + 147a^9b^3 + 420a^6b^6 + 147a^3b^9 - 84a^{10}b - 738a^7b^4 \\
&- 738a^4b^7 - 84ab^{10} + 420a^8b^2 + 1305a^5b^5 + 420a^2b^8 - 735a^6b^3 \\
&- 735a^3b^6 + 319a^4b^4 + 138a^5b^2 + 138a^2b^5 - 45a^6 - 231a^3b^3 - 45b^6 \\
&+ 90a^4b + 90ab^4 - 45a^2b^2)h^8 + (-a^{10}b^{10} + 35a^9b^9 - 147a^{10}b^7 \\
&- 147a^7b^{10} + 321a^{11}b^5 + 810a^8b^8 + 321a^5b^{11} - 329a^{12}b^3 - 1977a^9b^6 \\
&- 1977a^6b^9 - 329a^3b^{12} + 126a^{13}b + 2139a^{10}b^4 + 5051a^7b^7 \\
&+ 2139a^4b^{10} + 126ab^{13} - 840a^{11}b^2 - 5580a^8b^5 - 5580a^5b^8 - 840a^2b^{11} \\
&+ 2205a^9b^3 + 5939a^6b^6 + 2205a^3b^9 - 1776a^7b^4 - 1776a^4b^7 - 528a^8b^2 \\
&- 786a^5b^5 - 528a^2b^8 + 120a^9 + 1437a^6b^3 + 1437a^3b^6 + 120b^9 \\
&- 360a^7b - 1270a^4b^4 - 360ab^7 + 360a^5b^2 + 360a^2b^5 - 120a^3b^3)h^7 \\
&- BA(35a^9b^9 - 147a^{10}b^7 - 147a^7b^{10} + 321a^{11}b^5 + 789a^8b^8 + 321a^5b^{11} \\
&- 329a^{12}b^3 - 2019a^9b^6 - 2019a^6b^9 - 329a^3b^{12} + 126a^{13}b + 2271a^{10}b^4 \\
&+ 5586a^7b^7 + 2271a^4b^{10} + 126ab^{13} - 924a^{11}b^2 - 6579a^8b^5 - 6579a^5b^8 \\
&- 924a^2b^{11} + 2751a^9b^3 + 7460a^6b^6 + 2751a^3b^9 - 2127a^7b^4 - 2127a^4b^7 \\
&- 966a^8b^2 - 1791a^5b^5 - 966a^2b^8 + 210a^9 + 2625a^6b^3 + 2625a^3b^6 \\
&+ 210b^9 - 630a^7b - 2295a^4b^4 - 630ab^7 + 630a^5b^2 + 630a^2b^5 \\
&- 210a^3b^3)h^6 + (20a^9b^9 - 107a^{10}b^7 - 107a^7b^{10} + 234a^{11}b^5 + 596a^8b^8 \\
&+ 234a^5b^{11} - 231a^{12}b^3 - 1509a^9b^6 - 1509a^6b^9 - 231a^3b^{12} + 84a^{13}b \\
&+ 1677a^{10}b^4 + 4353a^7b^7 + 1677a^4b^{10} + 84ab^{13} - 672a^{11}b^2 - 5265a^8b^5 \\
&- 5265a^5b^8 - 672a^2b^{11} + 2247a^9b^3 + 6131a^6b^6 + 2247a^3b^9 - 1478a^7b^4 \\
&- 1478a^4b^7 - 1176a^8b^2 - 2578a^5b^5 - 1176a^2b^8 + 252a^9 + 3213a^6b^3 \\
&+ 3213a^3b^6 + 252b^9 - 756a^7b - 2808a^4b^4 - 756ab^7 + 756a^5b^2 \\
&+ 756a^2b^5 - 252a^3b^3)B^2A^2h^5 - (10a^9b^9 - 57a^{10}b^7 - 57a^7b^{10} \\
&+ 120a^{11}b^5 + 336a^8b^8 + 120a^5b^{11} - 109a^{12}b^3 - 798a^9b^6 - 798a^6b^9 \\
&- 109a^3b^{12} + 36a^{13}b + 831a^{10}b^4 + 2297a^7b^7 + 831a^4b^{10} + 36ab^{13} \\
&- 312a^{11}b^2 - 2760a^8b^5 - 2760a^5b^8 - 312a^2b^{11} + 1161a^9b^3 + 3157a^6b^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{14}(a, b, h) := & +1161 a^3 b^9 - 423 a^7 b^4 - 423 a^4 b^7 - 966 a^8 b^2 - 2439 a^5 b^5 - 966 a^2 b^8 \\
 & +210 a^9 + 2667 a^6 b^3 + 2667 a^3 b^6 + 210 b^9 - 630 a^7 b - 2351 a^4 b^4 \\
 & -630 a b^7 + 630 a^5 b^2 + 630 a^2 b^5 - 210 a^3 b^3) B^3 A^3 h^4 + (4 a^9 b^9 - 21 a^{10} b^7 \\
 & -21 a^7 b^{10} + 39 a^{11} b^5 + 123 a^8 b^8 + 39 a^5 b^{11} - 31 a^{12} b^3 - 267 a^9 b^6 - 267 a^6 b^9 \\
 & -31 a^3 b^{12} + 9 a^{13} b + 249 a^{10} b^4 + 741 a^7 b^7 + 249 a^4 b^{10} + 9 a b^{13} - 84 a^{11} b^2 \\
 & -858 a^8 b^5 - 858 a^5 b^8 - 84 a^2 b^{11} + 345 a^9 b^3 + 889 a^6 b^6 + 345 a^3 b^9 + 144 a^7 b^4 \\
 & +144 a^4 b^7 - 528 a^8 b^2 - 1503 a^5 b^5 - 528 a^2 b^8 + 120 a^9 + 1479 a^6 b^3 \\
 & +1479 a^3 b^6 + 120 b^9 - 360 a^7 b - 1326 a^4 b^4 - 360 a b^7 + 360 a^5 b^2 + 360 a^2 b^5 \\
 & -120 a^3 b^3) B^4 A^4 h^3 - (a^9 b^9 - 4 a^{10} b^7 - 4 a^7 b^{10} + 6 a^{11} b^5 + 22 a^8 b^8 + 6 a^5 b^{11} \\
 & -4 a^{12} b^3 - 42 a^9 b^6 - 42 a^6 b^9 - 4 a^3 b^{12} + a^{13} b + 34 a^{10} b^4 + 111 a^7 b^7 \\
 & +34 a^4 b^{10} + a b^{13} - 10 a^{11} b^2 - 120 a^8 b^5 - 120 a^5 b^8 - 10 a^2 b^{11} + 45 a^9 b^3 \\
 & +74 a^6 b^6 + 45 a^3 b^9 + 154 a^7 b^4 + 154 a^4 b^7 - 183 a^8 b^2 - 571 a^5 b^5 - 183 a^2 b^8 \\
 & +45 a^9 + 522 a^6 b^3 + 522 a^3 b^6 + 45 b^9 - 135 a^7 b - 480 a^4 b^4 - 135 a b^7 \\
 & +135 a^5 b^2 + 135 a^2 b^5 - 45 a^3 b^3) B^5 A^5 h^2 + (-16 a^6 b^6 + 42 a^7 b^4 + 42 a^4 b^7 \\
 & -36 a^8 b^2 - 117 a^5 b^5 - 36 a^2 b^8 + 10 a^9 + 105 a^6 b^3 + 105 a^3 b^6 + 10 b^9 \\
 & -30 a^7 b - 100 a^4 b^4 - 30 a b^7 + 30 a^5 b^2 + 30 a^2 b^5 - 10 a^3 b^3) B^6 A^6 h - B^{10} A^{10}, \\
 & -h^{10} + (-a^3 b^3 - 5 a^2 b^2 + 9 a^3 + 9 b^3 - 12 a b) h^9 + (-a^5 b^5 + 6 a^6 b^3 \\
 & +6 a^3 b^6 - 30 a^4 b^4 + 44 a^5 b^2 + 44 a^2 b^5 - 36 a^6 - 123 a^3 b^3 - 36 b^6 \\
 & +96 a^4 b + 96 a b^4 - 66 a^2 b^2) h^8 + (-a^7 b^7 + 10 a^8 b^5 + 10 a^5 b^8 - 15 a^9 b^3 \\
 & -95 a^6 b^6 - 15 a^3 b^9 + 194 a^7 b^4 + 194 a^4 b^7 - 168 a^8 b^2 - 537 a^5 b^5 \\
 & -168 a^2 b^8 + 84 a^9 + 654 a^6 b^3 + 654 a^3 b^6 + 84 b^9 - 336 a^7 b - 918 a^4 b^4 \\
 & -336 a b^7 + 462 a^5 b^2 + 462 a^2 b^5 - 220 a^3 b^3 + a^2 b^2) h^7 + (-a^9 b^9 \\
 & +12 a^{10} b^7 + 12 a^7 b^{10} - 30 a^{11} b^5 - 148 a^8 b^8 - 30 a^5 b^{11} + 20 a^{12} b^3 \\
 & +449 a^9 b^6 + 449 a^6 b^9 + 20 a^3 b^{12} - 556 a^{10} b^4 - 1534 a^7 b^7 - 556 a^4 b^{10} \\
 & +364 a^{11} b^2 + 2298 a^8 b^5 + 2298 a^5 b^8 + 364 a^2 b^{11} - 126 a^{12} - 1845 a^9 b^3 \\
 & -4094 a^6 b^6 - 1845 a^3 b^9 - 126 b^{12} + 672 a^{10} b + 3708 a^7 b^4 + 3708 a^4 b^7 \\
 & +672 a b^{10} - 1386 a^8 b^2 - 3542 a^5 b^5 - 1386 a^2 b^8 + 1320 a^6 b^3 + 1320 a^3 b^6 \\
 & -474 a^4 b^4 - 7 a^5 b^2 - 7 a^2 b^5 + 7 a^3 b^3) h^6 - B A (-a^9 b^9 + 11 a^{10} b^7 \\
 & +11 a^7 b^{10} - 25 a^{11} b^5 - 137 a^8 b^8 - 25 a^5 b^{11} + 15 a^{12} b^3 + 424 a^9 b^6 \\
 & +424 a^6 b^9 + 15 a^3 b^{12} - 541 a^{10} b^4 - 1526 a^7 b^7 - 541 a^4 b^{10} + 364 a^{11} b^2 \\
 & +2319 a^8 b^5 + 2319 a^5 b^8 + 364 a^2 b^{11} - 126 a^{12} - 1886 a^9 b^3 - 4161 a^6 b^6 \\
 & -1886 a^3 b^9 - 126 b^{12} + 714 a^{10} b + 3934 a^7 b^4 + 3934 a^4 b^7 + 714 a b^{10} \\
 & -1596 a^8 b^2 - 4096 a^5 b^5 - 1596 a^2 b^8 + 1704 a^6 b^3 + 1704 a^3 b^6 - 680 a^4 b^4 \\
 & -21 a^5 b^2 - 21 a^2 b^5 + 21 a^3 b^3) h^5 + (-a^9 b^9 + 8 a^{10} b^7 + 8 a^7 b^{10} - 13 a^{11} b^5 \\
 & -89 a^8 b^8 - 13 a^5 b^{11} + 6 a^{12} b^3 + 263 a^9 b^6 + 263 a^6 b^9 + 6 a^3 b^{12} - 350 a^{10} b^4 \\
 & -995 a^7 b^7 - 350 a^4 b^{10} + 252 a^{11} b^2 + 1592 a^8 b^5 + 1592 a^5 b^8 + 252 a^2 b^{11} \\
 & -84 a^{12} - 1341 a^9 b^3 - 2946 a^6 b^6 - 1341 a^3 b^9 - 84 b^{12} + 504 a^{10} b + 2886 a^7 b^4 \\
 & +2886 a^4 b^7 + 504 a b^{10} - 1218 a^8 b^2 - 3227 a^5 b^5 - 1218 a^2 b^8 + 1460 a^6 b^3 \\
 & +1460 a^3 b^6 - 637 a^4 b^4 - 35 a^5 b^2 - 35 a^2 b^5 + 35 a^3 b^3) B^2 A^2 h^4 \\
 & -(-a^9 b^9 + 3 a^{10} b^7 + 3 a^7 b^{10} - 3 a^{11} b^5 - 33 a^8 b^8 - 3 a^5 b^{11} + a^{12} b^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +101a^9b^6 + 101a^6b^9 + a^3b^{12} - 151a^{10}b^4 - 419a^7b^7 - 151a^4b^{10} \\
& +116a^{11}b^2 + 735a^8b^5 + 735a^5b^8 + 116a^2b^{11} - 36a^{12} - 642a^9b^3 \\
& -1435a^6b^6 - 642a^3b^9 - 36b^{12} + 228a^{10}b + 1434a^7b^4 + 1434a^4b^7 \\
& +228ab^{10} - 594a^8b^2 - 1686a^5b^5 - 594a^2b^8 + 798a^6b^3 + 798a^3b^6 \\
& -371a^4b^4 - 35a^5b^2 - 35a^2b^5 + 35a^3b^3) B^3A^3h^3 - (5a^8b^8 - 24a^9b^6 \\
& -24a^6b^9 + 42a^{10}b^4 + 115a^7b^7 + 42a^4b^{10} - 32a^{11}b^2 - 218a^8b^5 - 218a^5b^8 \\
& -32a^2b^{11} + 9a^{12} + 187a^9b^3 + 448a^6b^6 + 187a^3b^9 + 9b^{12} - 60a^{10}b \\
& -440a^7b^4 - 440a^4b^7 - 60ab^{10} + 168a^8b^2 + 532a^5b^5 + 168a^2b^8 - 252a^6b^3 \\
& -252a^3b^6 + 119a^4b^4 + 21a^5b^2 + 21a^2b^5 - 21a^3b^3) B^4A^4h^2 + (a^8b^8 - 4a^9b^6 \\
& -4a^6b^9 + 6a^{10}b^4 + 19a^7b^7 + 6a^4b^{10} - 4a^{11}b^2 - 33a^8b^5 - 33a^5b^8 - 4a^2b^{11} \\
& +a^{12} + 25a^9b^3 + 69a^6b^6 + 25a^3b^9 + b^{12} - 7a^{10}b - 63a^7b^4 - 63a^4b^7 \\
& -7ab^{10} + 21a^8b^2 + 77a^5b^5 + 21a^2b^8 - 35a^6b^3 - 35a^3b^6 + 14a^4b^4 \\
& +7a^5b^2 + 7a^2b^5 - 7a^3b^3) B^5A^5h - a^2b^2B^7A^7,
\end{aligned}$$

on prenem $A = a^2 - b$ i $B = a - b^2$ com a notació, per alleugerir les expressions.

Nota. Respecte de l'enunciat (ii) de l'anterior resultat, convé destacar que càlculs molt senzills demostren que, de fet, mai no hi ha òrbites periòdiques de període $p = 2$ per les aplicacions $F_{b,a}$, ni tampoc de període $p = 3$ quan $ab \neq 0$, ja sigui en nivells el·líptics o no, vegeu [9, Proposició 20].

Nota. Novament, observem que els càlculs amb els que es deriven les expressions de $c_p(a, b, h)$ a l'enunciat (iii) de l'anterior resultat són formals. Per tant, cal afegir la hipòtesi que els valors de a, b i h_p que verifiquen l'equació $c_p(a, b, h_p) = 0$ corresponen a nivells el·líptics. Per exemple, quan $AB = 0$, de la condició $c_4(a, b, h) = 0$ s'obté $h_4 = 0$, que no correspon a un nivell el·líptic.

També pot passar que per a determinats valors de $a, b \in \mathbb{R}$, les corbes C_{h_p} siguin buides a \mathbb{R}^2 .

Per a demostrar els enunciats (ii) i (iii) de l'anterior proposició, ens cal calcular efectivament la suma interna d'elements de la forma $Q + nQ$. Recordem breument el procediment de càlcul:

Considerem els punts $Q = [1 : 0 : 0]$ i $\mathcal{O} = [0 : 1 : 0]$ que pertanyen a totes les corbes el·líptiques $(C_h, +, \mathcal{O})$. Com abans, observem que donat qualsevol punt $P \in C_h$, el punt $P + Q$ s'obté com

$$P + Q = (P * Q) * \mathcal{O}.$$

Donat un punt $P = [x_0 : y_0 : 1]$, per calcular $[x_1 : y_1 : 1] = [x_0 : y_0 : 1] + Q$, primerament calcularem $[x_0 : y_0 : 1] * Q$ considerant la recta horitzontal $y = y_0$ que passa per $[x_0 : y_0 : 1]$ i Q , i que talla C_h en un segon punt $[x_1 : y_0 : 1] = [x_0 : y_0 : 1] * Q$.

A continuació, per calcular $[x_1 : y_0 : 1] * \mathcal{O}$, prenem la recta vertical $x = x_1$, que passa per $[x_1 : y_0 : 1]$, i que talla C_h al nou punt $[x_1 : y_1 : 1] = [x_0 : y_0 : 1] + Q$.

Observem que degut al fet que Q és tangent a l'asíptota $y = -b/a$ de C_h , el punt $Q * Q$, que és necessari per efectuar el càlcul de $2Q = (Q * Q) * \mathcal{O}$, s'obté calculant l'intersecció de la recta $y = -b/a$ amb C_h . D'aquesta manera obtenim el punt afí $Q * Q = [x_1 : -b/a : 1]$. El càlcul final de $2Q$ s'obté calculant la intersecció de la recta $x = x_1$, que passa per $[x_1 : -b/a : 1]$, amb C_h .

Tenint en compte això, els càlculs que apareixen als diferents apartats de la demostració s'obtenen amb l'ajuda de software de computació simbòlica, quan sigui necessari.

Demostració de la Proposició 2.2.2. (i) Si $a = b = 1$, es demostra que l'aplicació de Lyness 2-periòdica $F_{1,1}$ és globalment 5-periòdica (com a conseqüència del fet que l'aplicació de Lyness F_1 ho és).

(ii) Apliquem les regles formals explicades al preàmbul de la demostració per calcular la suma interna d'elements de la forma $Q + nQ$, tot obtenint els següents resultats:

$$\begin{aligned} Q &= [1 : 0 : 0], \\ 2Q &= [0 : -a : 1], \\ 3Q &= \left[\frac{h - aA}{bA} : \frac{-h + BA}{abA} : 1 \right]. \end{aligned}$$

Observem que $2Q \neq \mathcal{O}$ sempre. Considerem ara el cas $ab \neq 0$ (altrament les corbes no serien el·líptiques). Observem que $3Q = [a(h - aA) : -h + BA : abA]$, per tant, una condició necessària per tal que $3Q = \mathcal{O}$ és $A = 0$, però en aquest cas $3Q = [ah : -h : 0] \neq \mathcal{O}$.

(iii) Prosseguint els càlculs del punts nQ , obtenim:

$$\begin{aligned} 4Q &= \left[\frac{h - A(a^2b - b^2 + a)}{a(-h + aA)} : -\frac{b((ab - 1)Ah + BA^2)}{h^2 - (-b^2 + 2a)Ah + aBA^2} : 1 \right] \text{ i en general ,} \\ nQ &= \left[\frac{p_{n,1}}{q_{n,1}} : \frac{p_{n,2}}{q_{n,2}} : 1 \right], \end{aligned}$$

on les expressions dels numeradors i denominadors de nQ , per $n \in \{5, 6, 7\}$ venen

donades per:

$$\begin{aligned}
p_{5,1} &= -a(ah^2 - A(2a^2 - b)h + BA^3), \\
q_{5,1} &= (-h + A(a^2b - b^2 + a))(-h + BA), \\
p_{5,2} &= (-h + aA)(h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h \\
&\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab)), \\
q_{5,2} &= b(-h + A(a^2b - b^2 + a))((ab - 1)h + BA), \\
p_{6,1} &= -(-h + BA)(-h^3 + (-2b^2 + 3a)Ah^2 \\
&\quad + (a^2b^3 - b^4 + 3ab^2 - 3a^2)A^2h + a^2BA^3), \\
q_{6,1} &= ab((ab - 1)h + BA)(ah^2 - A(2a^2 - b)h + BA^3), \\
p_{6,2} &= -(-h + A(a^2b - b^2 + a))(-h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\
&\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3), \\
q_{6,2} &= a(h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h \\
&\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab))(ah^2 - A(2a^2 - b)h + BA^3), \\
p_{7,1} &= -b((ab - 1)h + BA)(-(a - 1)(a^2 + a + 1)h^3 + 3A(a^4 - a^2b + b^2 - a)h^2 \\
&\quad - (-2a^4b^2 + 3a^5 + 5a^2b^3 - 6a^3b - 3b^4 + 6ab^2 - 3a^2)A^2h \\
&\quad + B(-a^4b^2 + a^5 + 2a^2b^3 - 3a^3b - b^4 + 2ab^2 - a^2)A^3), \\
q_{7,1} &= (-h^3 + (-2b^2 + 3a)Ah^2 + (a^2b^3 - b^4 + 3ab^2 - 3a^2)A^2h + a^2BA^3) \\
&\quad \times (h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab)), \\
p_{7,2} &= ab(-h + BA)(ah^2 - A(2a^2 - b)h + BA^3)(h^3 + (-2a^3 - 2b^3 + 5ab - 1)h^2 \\
&\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 4ab + 2)h - B^2A^2), \\
q_{7,2} &= (-h^3 + (-2b^2 + 3a)Ah^2 + (a^2b^3 - b^4 + 3ab^2 - 3a^2)A^2h + a^2BA^3) \\
&\quad \times (-h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\
&\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3).
\end{aligned}$$

Com abans, observem que cal interpretar aquestes expressions formals dels punts nQ com a punts afins en el cas que els denominadors de les diferents coordenades siguin no nuls, i com a punts de la recta de l'infinit altrament.

Les condicions de periodicitat s'obtenen tot imposant que

$$E\left(\frac{p+1}{2}\right)Q = -E\left(\frac{p}{2}\right)Q, \quad p = 4, 5, \dots, 10,$$

on $E(x)$ denota la part entera de x .

Per trobar els punts $-nQ$, considerarem altra vegada la relació $-P = P * (\mathcal{O} * \mathcal{O})$. Notem que, com que \mathcal{O} no és un punt d'inflexió, aleshores $\mathcal{O} * \mathcal{O} \neq \mathcal{O}$. Un càlcul mostra que en el nostre cas $\mathcal{O} * \mathcal{O} = R := [-a/b : 0 : 1]$. Per tant, obtenim $-P = P * [-a/b : 0 : 1]$, la qual ens indica que per a buscar $-P$ caldrà trobar la recta que passa pels punts P i $[-a/b : 0 : 1]$, aïllar la coordenada y i substituir-la a l'expressió de la corba C_h , tot

trobant-ne la solució en x . Així doncs, $-Q = [-b : 0 : 1]$,

$$\begin{aligned}
 -2Q &= \left[\frac{h - BA}{abB} : -\frac{h + bB}{aB} : 1 \right], \\
 -3Q &= \left[-\frac{aB((ab - 1)h + BA)}{(h + bB)(-h + BA)} : \frac{-h + B(-ab^2 + a^2 - b)}{b(h + bB)} : 1 \right], \\
 -4Q &= \left[\frac{-(h + bB)(h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab))}{a(-h + B(-ab^2 + a^2 - b))((ab - 1)h + (-b^2 + a)A)} : \right. \\
 &\quad \left. \frac{b(bh^2 - B(-2b^2 + a)h + AB^3)}{(-h + BA)(-h + B(-ab^2 + a^2 - b))} : 1 \right] \text{ i en general} \\
 -nQ &= \left[\frac{p_{1,n}}{q_{1,n}} : \frac{p_{2,n}}{q_{2,n}} : 1 \right],
 \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}
 p_{1,5} &= -(-h + B(-ab^2 + a^2 - b))(-h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\
 &\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3), \\
 q_{1,5} &= (h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab)) \\
 &\quad \times (bh^2 - B(-2b^2 + a)h + AB^3)b, \\
 p_{2,5} &= (-h + BA)(h^3 - B(2a^2 - 3b)h^2 + (-a^3b^2 + a^4 - 3a^2b + 3b^2)B^2h - b^2AB^3), \\
 q_{2,5} &= ab((ab - 1)h + BA)(bh^2 - B(-2b^2 + a)h + AB^3), \\
 p_{1,6} &= -ab(-h + BA)(bh^2 - B(-2b^2 + a)h + AB^3)(h^3 + (-2a^3 - 2b^3 \\
 &\quad + 5ab - 1)h^2 + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 4ab + 2)h - B^2A^2), \\
 q_{1,6} &= (h^3 - B(2a^2 - 3b)h^2 + (-a^3b^2 + a^4 - 3a^2b + 3b^2)B^2h - b^2AB^3) \\
 &\quad \times (-h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\
 &\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3), \\
 p_{2,6} &= -((ab - 1)h + BA)a((b - 1)(b^2 + b + 1)h^3 + 3B(b^4 - ab^2 + a^2 - b)h^2 \\
 &\quad - (2a^2b^4 - 5a^3b^2 - 3b^5 + 3a^4 + 6ab^3 - 6a^2b + 3b^2)B^2h \\
 &\quad + A(a^2b^4 - 2a^3b^2 - b^5 + a^4 + 3ab^3 - 2a^2b + b^2)B^3), \\
 q_{2,6} &= (h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab)) \\
 &\quad \times (h^3 - B(2a^2 - 3b)h^2 + (-a^3b^2 + a^4 - 3a^2b + 3b^2)B^2h - b^2AB^3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{1,7} &= - (h^3 - B (2a^2 - 3b) h^2 + (-a^3b^2 + a^4 - 3a^2b + 3b^2) B^2h - b^2AB^3) \\
 &\quad \times (-h^5 + (-4a^2b^2 + 5a^3 + 5b^3 - 6ab) h^4 + (a^5b^5 - 10a^4b^4 + 17a^5b^2 + 17a^2b^5 \\
 &\quad - 10a^6 - 38a^3b^3 - 10b^6 + 24a^4b + 24ab^4 - 15a^2b^2) h^3 + BA (10a^4b^4 - 17a^5b^2 \\
 &\quad - 17a^2b^5 + 10a^6 + 37a^3b^3 + 10b^6 - 26a^4b - 26ab^4 + 19a^2b^2) h^2 \\
 &\quad - (4a^4b^4 - 9a^5b^2 - 9a^2b^5 + 5a^6 + 20a^3b^3 + 5b^6 - 14a^4b - 14ab^4 + 12a^2b^2) B^2A^2h \\
 &\quad + (a^4b^4 - 2a^5b^2 - 2a^2b^5 + a^6 + 5a^3b^3 + b^6 - 3a^4b - 3ab^4 + 3a^2b^2) B^3A^3), \\
 q_{1,7} &= a^2b(-h + BA) ((b-1)(b^2 + b + 1) h^3 + 3B(b^4 - ab^2 + a^2 - b) h^2 \\
 &\quad - (2a^2b^4 - 5a^3b^2 - 3b^5 + 3a^4 + 6ab^3 - 6a^2b + 3b^2) B^2h \\
 &\quad + A(a^2b^4 - 2a^3b^2 - b^5 + a^4 + 3ab^3 - 2a^2b + b^2) B^3) (h^3 + (-2a^3 - 2b^3 \\
 &\quad + 5ab - 1) h^2 + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 4ab + 2) h - B^2A^2), \\
 p_{2,7} &= -b(h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab) h + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab)) \\
 &\quad \times (h^5 + (2a^2b^2 - 3a^3 - 5b^3 + 6ab) h^4 + B(-3a^4b^2 + 3a^5 + 9a^2b^3 - 12a^3b \\
 &\quad - 10b^4 + 14ab^2 - a^2) h^3 - (a^5b^4 - 2a^6b^2 + a^7 + 6a^4b^3 - 6a^5b - 15a^2b^4 + 21a^3b^2 \\
 &\quad + 10b^5 - 3a^4 - 16ab^3 + 3a^2b) B^2h^2 - A(6a^2b^4 - 9a^3b^2 - 5b^5 + 3a^4 + 9ab^3 \\
 &\quad - 3a^2b) B^3h + A^3B^6), \\
 q_{2,7} &= a(-h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab) h^2 \\
 &\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab) h + B^3A^3) ((b-1)(b^2 + b + 1) h^3 \\
 &\quad + 3B(b^4 - ab^2 + a^2 - b) h^2 - (2a^2b^4 - 5a^3b^2 - 3b^5 + 3a^4 + 6ab^3 \\
 &\quad - 6a^2b + 3b^2) B^2h + A(a^2b^4 - 2a^3b^2 - b^5 + a^4 + 3ab^3 - 2a^2b + b^2) B^3).
 \end{aligned}$$

Per exemple, quan $p = 4$, la condició $2Q = -2Q$ es tradueix com

$$[0 : -a : 1] = [h - AB : -(h + bB)b : abB],$$

la qual es compleix si i només si $h - AB = 0$, donant lloc a la condició $c_4(a, b, h) = 0$.

Similarment, per caracteritzar les corbes el·líptiques contenint òrbites 5-periòdiques, obtenim que $3Q = -2Q$ és equivalent a

$$\begin{cases} \frac{h - aA}{bA} = \frac{h - AB}{abB}, \\ \frac{-h + AB}{abA} = -\frac{h + bB}{aB}. \end{cases}$$

A partir d'aquestes equacions veiem que h_5 ha de venir donat per les arrels del polinomi $c_5(a, b, h) = (ab - 1)h + AB$, és a dir, el resultat ve donat per

$$h_5 := -\frac{AB}{ab - 1}.$$

De la mateixa manera, per obtenir nivells el·líptics amb òrbites de període 6, impossem que $3Q = -3Q$ arribant a

$$\begin{cases} \frac{h - aA}{bA} = -\frac{aB((ab - 1)h + AB)}{(h + bB)(-h + AB)}, \\ \frac{-h + AB}{abA} = \frac{-h + B(-ab^2 + a^2 - b)}{b(h + bB)}. \end{cases}$$

Com al cas anterior, a partir d'aquestes equacions obtenim que h_6 ha de venir donat per les arrels del següent polinomi

$$c_6(a, b, h) = h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h + AB(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab),$$

el qual ens dóna el resultat desitjat. Els altres casos es dedueixen de manera similar. ■

2.3 Consideracions sobre l'ús de programes de computació simbòlica.

Donat que les corbes considerades en aquest capítol són cúbiques, per trobar els nivells d'energia pels quals les corbes invariants no són el·líptiques, podem resoldre el sistema d'equacions que caracteritza quan les corbes són singulars amb l'ajut d'un programari de manipulació algebraica sense fer servir cap llibreria en concret, o bé podem fer servir les instruccions específiques per a corbes el·líptiques com ara les que proporciona el paquet **algcurves** de Maple o bé els programes Magma o Sage.

Per a il·lustrar el tipus d'ús que es pot fer d'aquestes eines i les seves limitacions, a continuació donem un codi en Magma que permet calcular els nivells d'energia corresponents a corbes invariants per les aplicacions considerades en aquest capítol que no són el·líptiques, i comentem algunes precaucions que cal prendre quan es treballa a nivell formal amb aquest programa.

Recordem que tota corba el·líptica amb coeficients a un cos de característica diferent de 2 i 3 es isomorfa a una corba de Weierstrass

$$y^2 = x^3 + px + q, \tag{2.3.1}$$

[86, 87]. Aquesta corba de Weierstrass té associades dues quantitats

$$\Delta = -16(4p^3 + 27q^2) \quad \text{i} \quad j = -1728 \frac{(4p)^3}{\Delta}$$

anomenades *discriminant*[†] i *invariant* j respectivament. L'equació (2.3.1) correspon a una corba el·líptica si i només si $\Delta \neq 0$, vegeu per exemple [87, Capítol III.1 i Proposició

[†]No confondre amb el discriminant d'un polinomi.

1.4]. Així doncs, podem calcular els nivells d'energia corresponents a corbes invariants per l'aplicació de Lyness F_a , \tilde{C}_h que no són el·líptiques, tot demanant els factors del denominador de l'invariant j d'aquestes corbes, amb un software com ara Magma:

```
K<a,h>:=FunctionField(Rationals(),2);
A<x,y>:=AffineSpace(K,2);
C:=Curve(A,(x+1)*(y+1)*(x+y+a)-h*x*y);
CP:=ProjectiveClosure(C);
P:=CP![1,-1,0];
E:=EllipticCurve(CP,P);
Factorization(Denominator(jInvariant(E)));
```

Tot processant el programa a la pàgina web de Magma[‡], usant la versió V2.21-4, hem obtingut els factors del denominador de l'invariant j en 0.26 segons amb un total de memòria usada de 39.02MB.

```
<h, 3>,
<a - h - 1, 2>,
<a^3 - 2*a^2*h - 6*a^2 + a*h^2 - 10*a*h + 12*a + h - 8, 1>
```

Així doncs, les corbes de Lyness \tilde{C}_h són el·líptiques excepte per $h \in \{0, a-1, h_c^\pm\}$, on

$$h_c^\pm := \frac{2a^2 + 10a - 1 \pm (4a + 1)\sqrt{4a + 1}}{2a},$$

són les arrels del polinomi $ah^2 - 2a(a+5)h + a(a^2 - 6a + 12)$.

És interessant, però, comentar per què no hem fet servir la instrucció `Discriminant(E)`. Observem que en el cas de les corbes de Lyness \tilde{C}_h , quan demanem la instrucció

```
Factorization(Numerator(Discriminant(E)));
```

Obtenim:

```
<a - h, 36>,
<a^3 - 2*a^2*h - 6*a^2 + a*h^2 - 10*a*h + 12*a + h - 8, 1>
```

la qual cosa dóna, en efecte, l'equació que satisfan els valors no-el·líptics h_c^\pm , però omet els valors no-el·líptics $h = 0$ i $h = a - 1$ i afegeix de forma espúria el valor $h = a$.

El que està succeint en aquest cas és que quan treballem formalment deixant els paràmetres a i h lliures, el model de Weierstrass amb el qual Magma calcula el discriminant és:

$$y^2 = x^3 + \frac{(a-h)^{12}}{h^4(a-h-1)^4} p(a, h)x + \frac{(a-h)^{18}}{h^6(a-h-1)^6} q(a, h) \quad (2.3.2)$$

[‡]<http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>

amb

$$\begin{aligned} p(a, h) &= -27(h^4 - (4a + 8)h^3 + 2a(3a + 4)h^2 - 4(a - 2)(a^2 + 2)h + (a - 2)^4), \\ q(a, h) &= 54(h^6 + (-6a - 12)h^5 + (15a^2 + 36a + 24)h^4 - 4(a - 1)(5a^2 + 11a + 14)h^3 \\ &\quad + (15a^4 - 24a^3 + 12a^2 + 48a + 24)h^2 - 6(a^2 + 2)(a - 2)^3h + (a - 2)^6). \end{aligned}$$

Aquesta equació, només està definida si $h \neq 0$ i $h \neq a - 1$, té discriminant

$$\Delta = 2176782336 \frac{(ah^2 + (-2a^2 - 10a + 1)h + (a - 2)^3)(a - h)^{36}}{h^9(a - h - 1)^{10}},$$

i té invariant j :

$$j = \frac{(h^4 + (-4a - 8)h^3 + 2a(3a + 4)h^2 - 4(a - 2)(a^2 + 2)h + (a - 2)^4)^3}{h^3(ah^2 + (-2a^2 - 10a + 1)h + (a - 2)^3)(a - h - 1)^2}. \quad (2.3.3)$$

Observem que les arrels del denominador de l'invariant j dona, en efecte, els nivells crítics.

Notem que a diferència del discriminant, l'invariant j és manté per canvis birracionals que preserven la forma de Weierstrass (vegeu [22, Capítol 20, Lema 1]. Per altra banda, els únics canvis d'aquests tipus són:

$$u = \alpha^2 x, v = \alpha^3 y,$$

vegeu [22, p.93] i [87, p.45]. Aquests canvis transformen l'equació (2.3.1) en l'equació

$$v^2 = u^3 + \alpha^4 p u + \alpha^6 q, \quad (2.3.4)$$

amb nou discriminant

$$\Delta' = \alpha^{12} \Delta.$$

La no-invariància del discriminant per canvis birracionals és la raó per la qual es poden perdre solucions o bé que n'apareguin d'espúries quan es treballa a nivell formal. En efecte, quan es pren *formalment* el canvi birracional mencionat anteriorment amb

$$\alpha = \frac{h(a - h - 1)}{(a - h)^3},$$

l'equació (2.3.2) es transforma en l'equació

$$y^2 = x^3 + p(a, h)x + q(a, h),$$

que té discriminant

$$\Delta' = 2176782336 h^3 (ah^2 + (-2a^2 - 10a + 1)h + (a - 2)^3)(a - h - 1)^2,$$

i, òbviament, el mateix invariant j donat en (2.3.3).

En definitiva, el fet que l'invariant j es preserva per transformacions birracionals que preserven la forma de Weierstrass, aconsella treballar amb aquest darrer quan es treballa a nivell simbòlic formal.

Respecte de la solució espúria que donava la instrucció `Discriminant(E)`; Observem que quan fixem $h = a$, la instrucció `WeierstrassModel(E)`; ens dona que l'equació associada a la corba de Lyness \tilde{C}_a és:

$$y^2 = x^3 + \frac{(-6912a^2 + 6912a - 6912)x}{a^4} + \frac{221184a^3 + 414720a^2 - 331776a + 221184}{a^6}.$$

Aquesta corba està ben definida i és una cúbica no-singular (i per tant el·líptica) si $a \neq 0$.

Pel que fa als nivells no-el·líptics per les corbes de nivell (2.1.7) associades a l'integral primera de les aplicacions $F_{b,a}$ associades a les equacions de Lyness 2-periòdiques, fent servir el codi

```
K<a,b,h>:=FunctionField(Rationals(),3);
A<x,y>:=AffineSpace(K,2);
C:=Curve(A,(b*x+a)*(a*y+b)*(a*x+b*y+a*b)-h*x*y;
CP:=ProjectiveClosure(C);
P:=CP![0,1,0];
E:=EllipticCurve(CP,P);
Factorization(Denominator(jInvariant(E)));
```

obtenim en 0.29 segons amb un total de memòria usada de 39.02MB:

```
<h, 3>,
<b, 8>,
<a, 8>,
<a^12 - 4*a^11*b^2 + 6*a^10*b^4 - a^10*b - 4*a^9*b^6 +
  7*a^9*b^3 - 4*a^9*h + a^8*b^8 - 15*a^8*b^5 + 4*a^8*b^2*h +
  13*a^7*b^7 + 4*a^7*b^4*h - 3*a^7*b^4 + 3*a^7*b*h -
  4*a^6*b^9 - 4*a^6*b^6*h + 12*a^6*b^6 + 18*a^6*b^3*h +
  6*a^6*h^2 - 15*a^5*b^8 - 25*a^5*b^5*h + 4*a^5*b^2*h^2 +
  6*a^4*b^10 + 4*a^4*b^7*h - 3*a^4*b^7 + 6*a^4*b^4*h^2 -
  21*a^4*b^4*h - 3*a^4*b*h^2 + 7*a^3*b^9 + 18*a^3*b^6*h -
  21*a^3*b^3*h^2 - 4*a^3*h^3 - 4*a^2*b^11 + 4*a^2*b^8*h +
  4*a^2*b^5*h^2 - 4*a^2*b^2*h^3 - a*b^10 + 3*a*b^7*h -
  3*a*b^4*h^2 + a*b*h^3 + b^12 - 4*b^9*h + 6*b^6*h^2 -
  4*b^3*h^3 + h^4, 1>
```

Així doncs, les corbes són el·líptiques si $ab \neq 0$ i h és diferent de zero o una arrel del polinomi

$$h^4 + p_3(a, b)h^3 + p_2(a, b)h^2 + p_1(a, b)h + p_0(a, b),$$

on

$$\begin{aligned} p_3(a, b) &= -4a^2b^2 - 4a^3 - 4b^3 + ab, \\ p_2(a, b) &= 6a^4b^4 + 4a^5b^2 + 4a^2b^5 + 6a^6 - 21a^3b^3 + 6b^6 - 3a^4b - 3ab^4, \\ p_1(a, b) &= -4a^6b^6 + 4a^7b^4 + 4a^4b^7 + 4a^8b^2 - 25a^5b^5 + 4a^2b^8 - 4a^9 \\ &\quad + 18a^6b^3 + 18a^3b^6 - 4b^9 + 3a^7b - 21a^4b^4 + 3ab^7, \\ p_0(a, b) &= (-b^2 - a)(a^2 - b)(-a^2b^2 + a^3 + b^3)^3. \end{aligned}$$

Capítol 3

Determinació explícita de continus de punts periòdics per a aplicacions integrables racionals

3.1 Introducció

En aquest capítol, com en els dos anteriors, considerarem només aquelles aplicacions racionals integrables que tenen una *integral primera* V *racional*. Recordem també, que diem que una aplicació F preserva una fibració de corbes C_h , si cada corba C_h és invariant sota la iteració de F , i que anomenem *nivell d'energia* al paràmetre h .

Moltes aplicacions birracionals integrables del pla exhibeixen continus d'òrbites periòdiques i, als exemples dels capítols precedents, hem vist que els continus es corresponen amb determinats nivells d'energia. De fet, a part dels pocs casos d'aplicacions birracionals integrables globalment periòdiques, en un retrat de fase típic podríem trobar conjunts oberts de l'espai de fases densament coberts per corbes invariants plenes d'òrbites periòdiques, totes elles del mateix període. En aquests casos el conjunt de períodes de l'aplicació és infinit i conté almenys tots els períodes a partir d'un, vegeu els exemples dels capítols precedents. Per a les aplicacions integrables que preserven fibracions de gènere 0 o 1 (entenent-ho com a aplicacions que preserven cada fibra), una manera de localitzar la corba C_h a on hi ha els continus de punts periòdics per un període donat seria:

Gènere $g = 0$. En el cas que les corbes C_h tinguin genèricament gènere 0, cada aplicació $F|_{C_h}$ és conjugada a una transformació de Möbius. Com hem vist al Capítol 1, sota certes condicions les aplicacions $F|_{\{|V|=|h|\}}$ són conjugades a rotacions. Per tant, si existeix un obert $\mathcal{H} \subset \text{Im}(V) \subset \mathbb{K}$ tal que per tot $h \in \mathcal{H}$ les corbes C_h tenen gènere 0 i les aplicacions $F|_{\{|V|=|h|\}}$ són conjugades a rotacions, aleshores és possible donar una expressió explícita de la funció nombre de rotació $\theta(h)$. Per tant, és possible trobar els

continus de punts p -periòdics usant l'expressió $\theta(h) = q/p$ per tot $1 \leq q \leq p-1$, tal que $(q, p) = 1$, i tal que $q/p \in \mathcal{H}$, vegeu els exemples del Capítol 1 (especialment la Proposició 1.4.4), o bé [47, 61].

Gènere $g = 1$. En aquest cas, quan les aplicacions sobre les corbes invariants C_h són conjugades a rotacions, no disposem d'una descripció explícita en termes de funcions elementals de la funció $\theta(h)$. Tot i així, tal i com hem vist al Capítol 2, la descripció de l'aplicació en termes de l'operació de grup ens dona la possibilitat de localitzar els nivells d'energia caracteritzant les condicions que fan que cert punt distingit de la corba sigui de torsió, vegeu l'equació (2.1.10) del Capítol 2.

Pel cas que les corbes C_h siguin genèricament de gènere $g = 2$, és conegut que les aplicacions birracionals integrables que preserven les corbes d'una fibració de corbes de gènere 2 *no singulars* són globalment periòdiques, amb un període $p \leq 84(g-1)$, vegeu [32, 55].

En aquest capítol proposem una tècnica que aprofita la racionalitat de les aplicacions i la racionalitat de les integrals primeres per tal de caracteritzar sobre quines corbes C_h hi ha els continus de punts periòdics. Tot i que sovint farem servir la birracionalitat de les aplicacions i que tots els exemples que examinarem són birracionals, el mètode funciona per aplicacions racionals. Un exemple trivial d'aplicació racional, però no birracional, amb integral primera racional $V(x, y) = y$ és $F(x, y) = (x^2, y)$. El mètode és purament computacional, i només es basa en la hipòtesi que els continus de punts periòdics estan situats sobre corbes de nivell de la integral primera. Fins a on coneixem, el mètode és nou i en alguns exemples ens permet millorar resultats coneguts a la literatura, com ara alguns dels que apareixen a [82], obtinguts amb eines més algebraïques.

Un altre avantatge del nostre enfocament és aquest que es pot estendre a aplicacions racionals integrables en dimensions superiors. Creiem que utilitzant el nostre punt de vista també es podrien reproduir els resultats de [82] per les aplicacions de Lotka-Volterra a \mathbb{R}^3 , o també obtenir condicions de periodicitat per altres aplicacions com la de Lyness a \mathbb{R}^3 estudiada a [26].

Observem però que, en general, per aplicacions integrables del pla, no és cert que els continus de punts periòdics coincideixin amb corbes de nivell de l'integral primera V . Només cal considerar per exemple, una aplicació F , definida en un obert de \mathbb{R}^2 , que preservi una fibració $\{V = h\}_{h \in \mathcal{H}}$ on $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ és un obert tal que per tot $h \in \mathcal{H}$, la corba $\{V = h\}$ és homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Podem pensar, doncs, que $\{F_h := F|_{V=h}\}$ és una família d'aplicacions uniparamètrica del cercle. Si cada aplicació F_h preserva orientació, aleshores genèricament (és a dir, en un conjunt obert i dens, per una certa topologia, de l'espai de difeomorfismes orientables, [38]) la funció nombre de rotació $\theta(h)$ és una funció

de Cantor ([7, Teorema A] i [68] (vegeu també [5])), amb la qual cosa, fixat un nivell q/p tal que $\theta(h) = q/p$ existeix un obert $I_{q/p} \in \mathcal{H}$ de manera que per tot $h \in I_{q/p}$ existeix algun punt periòdic a $\{V = h\}$. Això no vol dir que tot nivell $\{V = h\}$ estigui ple d'òrbites periòdiques, ja que típicament aquests nivells contenen òrbites p -periòdiques hiperbòliques. Així doncs, suposem que per un determinat valor $h \in I_{q/p}$ tenim una òrbita p -periòdica hiperbòlica de l'aplicació del cercle F_h , aleshores per continuïtat de les solucions del sistema determinat per

$$F^p(x, y) = \text{Id},$$

els punts periòdics de cada nivell formen un continu, però aquest continu, no coincideix amb cap nivell $\{V = h\}$, tal i com si passava als casos de $g = 0$ i $g = 1$ mencionats anteriorment.

En resum, en aquest capítol descriurem un mètode de càlcul efectiu per a trobar condicions que han de satisfer els continus de punts periòdics situats sobre corbes de nivell de les integrals primeres associades a aplicacions racionals amb integrals primeres racionals. Primer descriurem el mètode, per aplicar-lo a continuació a l'estudi dels continus de punts periòdics de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira. Per completar el capítol, descriurem d'altres exemples com l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica i d'altres que s'han tractat des de diferents punts de vista als capítols anteriors, com pot ser l'aplicació de Lyness; les aplicacions de Lyness k -periòdiques amb $k \in \{2, 3, 6\}$; la de Bastien i Rogalski. De totes elles, trobarem les condicions necessàries per a l'existència dels continus de punts periòdics.

Totes les aplicacions que apareixen als exemples, excepte el cas de la Saito i Saitoh (vegeu la Secció 3.11), s'han considerat definides als oberts de \mathbb{R}^2 i amb les restriccions dels paràmetres que típicament apareixen a la literatura. Les condicions necessàries per l'existència de punts periòdics que es presenten en aquest capítol s'han obtingut mitjançant un mètode que no té en compte aquestes restriccions. Cal considerar-les doncs, com a condicions formals que tindrien sempre solució quan les aplicacions es consideren definides a un obert de \mathbb{C}^2 i amb paràmetres complexos.

3.2 Descripció dels procediments efectius de càlcul

3.2.1 Condicions per a l'existència de continus d'òrbites periòdiques

Sigui $G_A : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ una família d'aplicacions integrables birracionals amb components $G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$, paràmetres $A \in \mathbb{R}^n$, on \mathcal{U} és un obert de \mathbb{R}^2 i amb

una integral primera racional V_A . Per tal de buscar continus d'òrbites periòdiques de l'aplicació G_A , cal trobar aquells punts $(x, y) \in \mathcal{U}$ tals que

$$G_A^k(x, y) = (x, y), \quad (3.2.1)$$

per exemple, tot resolent el sistema d'equacions.

Si assumim que, per cada A fixat, els continus de punts periòdics estan situats sobre les corbes de nivell de la integral primera V_A , aleshores per caracteritzar un continu de punts k -periòdics només caldria determinar el nivell d'energia h_k a on estan continguts. Una manera d'abordar el problema seria resoldre el següent sistema d'equacions (que en principi només és una condició necessària):

$$\begin{cases} (G_A)_1^k(x, y) = x, \\ V_A(x, y) = h, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

on el subíndex 1 (respectivament 2) indica la primera (respectivament la segona) component del punt.

La primera equació del sistema anterior caracteritzaria els punts periòdics de la aplicació (tot i que ho reduïm a la primera component, d'aquí que, en principi, parlem només de condició necessària). La segona equació caracteritzaria l'energia h corresponent als punts periòdics trobats. En definitiva, estem buscant l'energia h de manera que els punts de la corba de nivell siguin k -periòdics i, reduïm el nostre estudi a la primera coordenada (es podria fer de manera idèntica, usant la segona).

Notem que per caracteritzar els nivells d'energia que contenen els punts periòdics cal que el sistema (3.2.2) tingui solucions que no depenguin de les coordenades x i y . Per aquesta raó, i també per tenir un major control sobre els càlculs quan treballem amb software de computació simbòlica, en aquest capítol en comptes de resoldre directament l'equació (3.2.2), buscarem les condicions de periodicitat, tot analitzant quins factors de la resultant dels polinomis

$$\phi(y, h) := \text{Res} \left(\text{numer} \left((G_A)_1^k(x, y) - x \right), \text{numer} (V_A(x, y) - h); x \right) \quad (3.2.3)$$

només contenen termes en h , sense dependre de les coordenades x i y . Denotarem $D_k(A, h)$, al producte d'aquests factors.

Al producte de factors de $D_k(A, h)$ que queden després de treure aquells termes que apareixen en alguns dels $D_j(A, h)$ on j és o bé 1, o bé un divisor de k , els denotarem $d_k(A, h)$ i a aquestes expressions, *d-condicions de periodicitat* associades a la integral primera V_A , amb el benentès que si existeixen continus de punts periòdics sobre els nivells d'energia, aleshores aquests nivells d'energia compleixen les condicions de periodicitat però que, a priori, no podem garantir que totes les solucions d'aquestes equacions realment corresponguin amb continus de punts periòdics perquè els factors que apareixen a

les resultants, poden afegir solucions espúries.

Notem, però, que usant procediments alternatius com els exposats als capítols 1 i 2 es pot demostrar que les expressions $d_k(\Lambda, h)$ calculades per a tots els exemples que es mostren en aquest capítol, realment caracteritzen els continus d'òrbites periòdiques.

Observem que, en principi, es podria donar el cas que per raons de longitud a les expressions, fos aconsellable considerar

$$\tilde{\phi}(x, h) := \text{Res} \left(\text{numer} \left((G_\Lambda)_1^k(x, y) - x \right), \text{numer} (V_\Lambda(x, y) - h); y \right).$$

En repetides ocasions hem observat que calculant de forma directa l'expressió de $\phi(y, h)$ usant l'expressió (3.2.3), sovint arribem a una obstrucció computacional (vegeu el comentari a la Secció 3.4.1) que es pot evitar introduint una petita variació en el càlcul. Concretament, observem que buscar els punts $(x, y) \in \mathcal{U}$ tals que $(G_\Lambda)_1^k(x, y) = x$, és equivalent a buscar els punts tals que

$$(G_\Lambda)_1^{k-m}(x, y) = ((G_\Lambda)^{-1})_1^m(x, y),$$

per $m = 0, \dots, k-1$. Per aquesta raó, quan sigui necessari buscarem els factors $d_k(\Lambda, h)$ com el producte dels factors que no depenen de la variable y a l'expressió de:

$$\phi_{m,k}(y, h) := \text{Res} \left(\text{numer} \left((G_\Lambda)_1^{k-m}(x, y) - ((G_\Lambda)^{-m})_1(x, y) \right), \text{numer} (V_\Lambda(x, y) - h); x \right). \quad (3.2.4)$$

amb $m = 0, \dots, k-1$.

Nota. Totes les condicions de periodicitat en aquest capítol, i per tots els exemples excepte el cas de l'aplicació de Saito i Saitoh analitzada a la Secció 3.11, s'han obtingut analitzant els factors de les diferents resultants donades per l'expressió (3.2.4) amb m proper a $k/2$, calculades amb l'ajut del programari Maple v.17 amb un processador Intel Core 2Duo P8700 i amb 4Gb de memòria RAM, esgotant els límits del que ens permet aquesta tecnologia.

3.2.2 La regió factible

En la secció anterior hem introduït les condicions de periodicitat $d_k(\Lambda, h) = 0$. Aquestes condicions depenen d'un paràmetre h (l'energia corresponent a la corba de nivell) i de Λ (paràmetre o paràmetres de l'aplicació). Si consideréssim les aplicacions definides a \mathbb{C}^2 , amb paràmetres i energia també complexos, quan els factors $d_k(\Lambda, h)$ existeixen, aleshores sempre hi hauria corbes invariants plenes de punts periòdics amb període k .

Ara bé, donat que treballem amb aplicacions reals, amb paràmetres i valors de l'energia reals, hem de considerar les condicions de periodicitat com a *condicions formals*.

En aquest cas els continus d'òrbites k -periòdiques poden aparèixer quan existeix un parell $(\Lambda, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ que anul·la la condició $d_k(\Lambda, h)$ trobada, sempre i quan

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, V_\Lambda(x, y) = h\} \neq \emptyset. \quad (3.2.5)$$

Anomenarem *regió factible*, al subconjunt $\mathcal{R} = \{(\Lambda, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \text{ tal que es verifica (3.2.5)}\}$.

En algunes ocasions, com és el cas de les aplicacions uniparamètriques de la McMillan-Gumovski-Mira (en les que $\Lambda = a > 0$), per un valor del paràmetre a donat, la condició (3.2.5) es compleix a partir d'un cert valor $h_c(a)$ que coincideix amb un mínim global de la funció V_a a l'espai de fases, diguem-li $(x_0(a), y_0(a))$, que a la vegada coincideix amb un punt fix de l'aplicació G_a , i que per tant, també és un punt k -periòdic. Quan això succeeix, podem determinar els valors del paràmetre a pels quals es produeixen les interseccions de les corbes $d_k(a, h) = 0$ amb la regió factible, examinant les solucions del sistema

$$\begin{cases} V_a(x_0(a), y_0(a)) = h \\ d_k(a, h) = 0. \end{cases}$$

Per estudiar el sistema anterior, considerarem els factors de la resultant

$$\text{Res}(\text{numer}(V_a(x_0(a), y_0(a)) - h), d_k(a, h); h). \quad (3.2.6)$$

Els valors del paràmetre a que anul·len aquesta resultant, ens permeten determinar les interseccions de les corbes $d_k(a, h) = 0$ amb la regió factible, i per tant els intervals del paràmetre a pels quals poden existir, o variar el número de corbes de nivell de $\{V_a = h\}$ no buides a \mathbb{R}^2 , tals que (a, h) satisfan les d -condicions de periodicitat.

A l'Exemple 3.4.6, al final de la Secció 3.4.2, s'explica amb detall com es fa servir aquesta tècnica. Els resultats obtinguts, s'utilitzen a la Secció 3.4.4 per estudiar l'existència i nombre de nivells d'energia que verifiquen les d -condicions de periodicitat pel cas $k = 5$, per una família uniparamètrica d'aplicacions de McMillan-Gumovski-Mira.

3.3 Resultats preliminars

Insistim novament, en que el mètode només donarà resultat si els continus de punts periòdics coincideixen amb els nivells d'energia. Observem que en el cas d'aplicacions a \mathbb{R}^2 , podem garantir aquest fet si per cada Λ fixat, existeix una Simetria de Lie X_Λ de l'aplicació G_Λ amb integral primera V_Λ . Aleshores a partir dels Teoremes 1 i 2 de [27] que garanteixen que la dinàmica sobre les corbes de nivell és conjugada a una transformació lineal, podem inferir que tot nivell d'energia que no contingui punts singulars de

X_A i que contingui un punt periòdic, està format per un continu de punts periòdics de G_A .

Recordem que un camp vectorial X és una simetria de Lie d'una l'aplicació G si satisfà $X(G(x)) = DG(x) \cdot X(x)$, on DG és la matriu diferencial de G , [27, 53]. El camp vectorial X es relaciona amb la dinàmica de G en el sentit que G envia òrbites de X en òrbites de X . En el cas integrable, quan X i G deixen invariants les components connexes de les corbes de nivell d'una integral primera V comuna, l'existència d'una simetria de Lie caracteritza completament la dinàmica de l'aplicació, ja que sobre cada corba invariant, la dinàmica ve descrita per aquest resultat:

Teorema 3.3.1. [27, Teorema 1] *Sigui X una simetria de Lie \mathcal{C}^1 d'un difeomorfisme $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Sigui γ una òrbita de X invariant per G . Aleshores, $G|_\gamma$ és l'aplicació a temps τ del flux X , és a dir $G(x) = \varphi(\tau, x)$, $x \in \gamma$. A més,*

- (a) *Si $\gamma \cong \{p\}$ aleshores p és un punt fix de G .*
- (b) *Si $\gamma \cong \mathbb{S}^1$, aleshores $G|_\gamma$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació $\theta = \tau/T$, on T és el període de γ .*
- (c) *Si $\gamma \cong \mathbb{R}$, aleshores $G|_\gamma$ és conjugada a una translació de la recta.*

Es pot observar que si una aplicació F té una integral primera $V \in \mathcal{C}^{m+1}(\mathcal{U})$ on $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, preservant una mesura absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue amb densitat no nul·la $\nu \in \mathcal{C}^m$ a \mathcal{U} , es compleix que el camp vectorial $X = \nu^{-1}(-V_y, V_x)$ és sempre una simetria de Lie de F a \mathcal{U} . Observem que quan l'aplicació preserva la mesura de Lebesgue, és a dir que $\det(DG) \equiv 1$, el camp X és simplement el camp Hamiltonià associat a V . Com a conseqüència d'aquest fet, tenim el següent resultat que caracteritza l'existència d'un continu de punts periòdics sobre algunes corbes de nivell de la integral primera i prova algunes propietats de regularitat de la funció nombre de rotació. Aquest resultat és una combinació dels resultats exposats a [12, 27] i [31].

Teorema 3.3.2. *Sigui F una aplicació $\mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ que preserva l'orientació, amb una mesura invariant amb densitat no nul·la $\nu \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ i amb integral primera $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$. Si V té una component connexa γ_h de la corba de nivell $\{V(x) = h\}$ sense punts fixos, invariant per F i difeomorfa a \mathbb{S}^1 , aleshores $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a una rotació. Més encara, si $F|_{\gamma_h}$ té nombre de rotació $\theta(h) = q/p \in \mathbb{Q}$, amb $\gcd(p, q) = 1$, aleshores tots els punts de $\gamma_h \subset \mathcal{U}$ són punts p -periòdics de F .*

Suposem que existeix un continu de corbes tancades invariants per F , $\{\gamma_h; h \in \mathcal{H}\}$, on \mathcal{H} és un conjunt obert no buit de \mathbb{R} , sense punts fixos i acabant en un punt fix el·líptic no degenerat de F , z amb valors propis $e^{\pm i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aleshores la funció nombre de rotació $\theta(h)$, que assigna a cada corba γ_h el seu nombre de rotació, és $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ i tendeix a $\alpha/(2\pi)$, quan γ_h aproxima z .

Quan F reverteix l'orientació, tots els resultats exposats més amunt es verifiquen per a F^2 .

Demostració. Afirmem que F té una simetria de Lie donada per $X = \nu^{-1}(-V_y, V_x)$. En efecte, per [27, Teorema 2] existeix una simetria de Lie que preserva les corbes de nivell de V (per tant de la forma $X = \mu(-V_y, V_x)$) si existeix una funció μ satisfent la *condició de compatibilitat* $\mu(F(x, y)) = \det(DF(x, y)) \mu(x, y)$. Provem doncs, l’afirmació anterior.

Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ un conjunt mesurable Lebesgue. Considerant la fórmula del canvi de variable i el fet que F preserva l’orientació, tenim:

$$m(F^{-1}(\mathcal{B})) = \int_{F^{-1}(\mathcal{B})} \nu(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{B}} \nu(F(x, y)) \det(DF(x, y)) dx dy.$$

Per altra banda, $m(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \nu(x, y) dx dy$. Per tant, com $m(F^{-1}(\mathcal{B})) = m(\mathcal{B})$, aleshores

$$\nu(x, y) = \nu(F(x, y)) \det(DF(x, y)), \text{ q.p.t. en } \mathcal{U}, \quad (3.3.1)$$

la qual cosa, de fet, implica que (3.3.1) es manté en el conjunt \mathcal{U} degut a la regularitat de ν i F en aquest conjunt. Prenent $\mu = 1/\nu$, l’afirmació anterior queda demostrada.

Sigui $\gamma_h \cong \mathbb{S}^1$ una component connexa de la corba de nivell $\{V(x) = h\}$, la qual és invariant per F , amb F sense punts fixos. Com que X és una simetria de Lie, per [27, Teorema 1] aleshores $F|_{\gamma_h}$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació donat per $\theta(h) = \tau(h)/T(h)$, on $T(h)$ és el període de γ_h com a òrbita periòdica de X , i $\tau(h)$ ve definida per l’equació $F(x, y) = \varphi(\tau(h), (x, y))$ on φ denota el fluxe de X , i $(x, y) \in \gamma_h$. Consegüentment d’aquest fet, si $\theta(h) = q/p \in \mathbb{Q}$, amb $\gcd(p, q) = 1$, aleshores F té un continu de punts p -periòdics a γ_h .

Observem que la regularitat de $\theta(h) = \tau(h)/T(h)$ sobre \mathcal{H} és conseqüència de la regularitat del fluxe de X , que garanteix la diferenciabilitat d’ambdues, la funció període $T(h)$, i la funció $\tau(h)$, via el teorema de la funció implícita. Finalment, establim que $V(z) = h_z$. Com a conseqüència de [12, Proposició 8] (veure també els resultats de [26] i [31]), $\lim_{h \rightarrow h_z} \theta(h) = \theta^*$, on $\theta^* = \alpha/(2\pi)$ és el nombre de rotació de l’aplicació lineal $L(w) = DF(z)w$, demostrant així el que volíem. ■

En resum, si existeixen corbes de nivell de la integral primera V tancades, podem garantir l’existència de continus de punts periòdics sobre aquests conjunts de nivell o bé si trobem una simetria de Lie amb la mateixa integral primera sense altres punts singulars que els punts fixos de l’aplicació sobre la corba, o bé si provem que la nostra aplicació preserva una mesura absolutament contínua respecte de la mesura de Lebesgue.

3.4 Aplicació de McMillan-Gumovski-Mira

En aquesta secció considerem el sistema dinàmic discret generat per una família uniparamètrica de recurrències considerades per I. Gumovski i C. Mira a [52], les quals són també una subfamília especial de les aplicacions QRT, considerades per E. M. McMillan

a [62]. Determinarem els possibles valors del paràmetre per als quals pot existir un continu de punts periòdics. Recordem que si hi ha continus i coincideixen amb els nivells d'energia, aquests han de verificar les d -condicions de periodicitat. Sigui doncs

$$x_{n+2} = -x_n + \frac{x_{n+1}}{a + x_{n+1}^2} \quad \text{amb } a > 0,$$

o de manera equivalent, l'aplicació associada

$$G_a(x, y) = \left(y, -x + \frac{y}{a + y^2} \right) \quad (3.4.1)$$

anomenada *aplicació de McMillan-Gumovski-Mira*, la qual és contínua i diferenciable, amb inversa

$$G_a^{-1}(x, y) = \left(\frac{x - ya - yx^2}{a + x^2}, x \right) \quad (3.4.2)$$

també contínua i diferenciable (tenim doncs un difeomorfisme). Considerem també la funció

$$V_a(x, y) := a(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy \quad (3.4.3)$$

que és integral primera de G_a .

Un càlcul immediat demostra que $\det(DG_a(x, y)) \equiv 1$, i per tant l'aplicació G_a és integrable i preserva la mesura de Lebesgue. Per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{U} : V_a(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació G_a és conjugada a una rotació i aquells nivells d'energia que corresponen a un nombre de rotació racional formen continus de punts periòdics. De forma alternativa, notem que això també es dedueix del fet que l'aplicació G_a té la simetria de Lie

$$X_a(x, y) = (x - 2ay - 2x^2y, 2ax - y + 2xy^2), \quad (3.4.4)$$

vegeu [27, Exemple 2] o bé [53]. L'existència de corbes de nivell de V_a tancades està garantida, per exemple, pel Lemma 3.4.3, a la Secció 3.4.2.

3.4.1 Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat

A continuació, aplicarem amb detall el mètode descrit a la Secció 3.2.1, per tal de trobar les d -condicions de periodicitat de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira.

Comencem per exemple, buscant els punts 3-periòdics de l'aplicació G_a . Prenem doncs la primera component de $G_a^3(x, y)$

$$G_{a1}^3(x, y) = -\frac{ya^3 + (x^2y + 2y^3 + x)a^2 + y(2y^2x^2 + y^4 - 1)a + xy^4(xy - 1)}{a^3 + (x^2 + 2y^2)a^2 + y(2x^2y + y^3 - 2x)a + y^2(xy - 1)^2},$$

i extraïem el numerador de l'expressió $G_a^3(x, y) - x$ per aquesta primera component

$$\begin{aligned} \text{numer}(G_{a1}^3(x, y) - x) &= (-x - y)a^3 + (-x^3 - x^2y - 2xy^2 - 2y^3 - x)a^2 \\ &\quad - y(2yx^3 + 2y^2x^2 + xy^3 + y^4 - 2x^2 - 1)a - xy^2(xy + y^2 - 1)(xy - 1). \end{aligned}$$

Prenem ara l'expressió que surt de considerar la corba de nivell

$$V_a(x, y) - h = a(x^2 + y^2) + y^2x^2 - xy - h,$$

i calculem la resultant d'ambdues expressions

$$\begin{aligned} \text{Res}(\text{numer}(G_{a1}^3(x, y) - x), V_a(x, y) - h, x) \\ = (y^2 + a)^4 (a^2 + a + h)^2 (y^4 + 2y^2a - y^2 - h). \end{aligned}$$

D'aquí obtenim la condició de periodicitat corresponent als punts 3-periòdics, ja que l'únic factor que no depèn de la variable y a l'anterior resultant és $a^2 + a + h$. Denotarem doncs, aquesta expressió com a $d_3(a, h) := h + a(a + 1)$.

Observació 3.4.1. Fent el mateix per al cas 2-periòdic obtenim:

- (i) $\text{numer}(G_{a1}^2(x, y) - x) = -xa - y(xy - 1).$
- (ii) $V_a(x, y) - h = a(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy - h.$
- (iii) $\text{Res}(\text{numer}(G_{a1}^2(x, y) - x), V_a(x, y) - h, x) = (a + y^2)(4ay^4 + 4a^2y^2 - 4hy^2 - 4ah - y^2).$

En aquest cas, no obtenim cap factor que no depengui de la variable y , i per tant no hem trobat cap condició de periodicitat associada a l'existència de punts 2-periòdics. És per aquest fet, que hem iniciat el nostre exemple amb els punts 3-periòdics.

Conforme anem augmentant el període pel qual busquem continus, si continuem aplicant el mètode calculant l'expressió de $\phi_k(y, h)$ donada per (3.2.3), ens trobem amb obstruccions computacionals severes degut a la gran quantitat i longitud dels factors que apareixen a les expressions les resultants. Per exemple treballant amb el programari Maple v.17 amb un processador Intel Core 2Duo P8700, de seguida ens trobem amb un error que prové de la incapacitat del programa per a assignar un bloc gran de memòria, i el càlcul s'interromp donant lloc a un error de Maple de la tipologia “*Memory Allocation Errors*”. Tal i com hem comentat a la Secció 3.2.1, per a buscar períodes més elevats, considerarem les aplicacions G_a i G_a^{-1} , donades a (3.4.1) i (3.4.2), i analitzarem les expressions de les resultants $\phi_{m,k}(y, h)$ per a valors convenients de m .

Per exemple, pel càlcul de les d -condicions de periodicitat corresponents als punts 5-periòdics, usarem

$$G_a^5(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow G_a^3(x, y) = (G_a^{-1})^2(x, y),$$

d'on obtenim

$$G_{a1}^3(x, y) = -\frac{y(y^2 + a)^2 x^2 + (-y^2 + a)(y^2 + a)x + ay(y^2 + a + 1)(y^2 + a - 1)}{(y^2 + a)^2 x^2 - 2y(y^2 + a)x + ay^4 + 2a^2 y^2 + a^3 + y^2},$$

$$(G_a^{-1})_1^2(x, y) = -\frac{(y^2 + a)x^5 - x^4 y + 2a(y^2 + a)x^3 + a(ay^2 + a^2 - 1)x + a^2 y}{(y^2 + a)x^4 - 2x^3 y + (2ay^2 + 2a^2 + 1)x^2 - 2axy + a^2(y^2 + a)}.$$

Com abans, considerem l'expressió

$$\begin{aligned} \text{numer}(G_{a1}^3(x, y) - (G_a^{-1})_1^2(x, y)) &= (-y + x)a^6 + (-y + x)(3x^2 + 3y^2 - 1)a^5 \\ &+ (-y + x)(3x^4 + 9x^2 y^2 + 3y^4 - 2x^2 - 3xy - 2y^2 - 1)a^4 + (-y + x) \\ &\times (x^6 + 9x^4 y^2 + 9x^2 y^4 + y^6 - x^4 - 6x^3 y - 4x^2 y^2 - 6xy^3 - y^4 - x^2 + 2xy - y^2)a^3 \\ &+ (-y + x)(3y^2 x^6 + 9x^4 y^4 + 3x^2 y^6 - 3x^5 y - 2x^4 y^2 - 12x^3 y^3 - 2x^2 y^4 - 3xy^5 \\ &+ 2x^3 y + 2x^2 y^2 + 2xy^3 - x^2 + xy - y^2)a^2 + xy(-y + x)(xy - 1)(3x^4 y^2 + 3x^2 y^4 \\ &- 3x^3 y - x^2 y^2 - 3xy^3 + xy - 1)a + x^3 y^3(-y + x)(xy - 1)^3, \end{aligned}$$

i la relació que surt de considerar la corba de nivell $V_a(x, y) = h$. Finalment, igual que abans, calculem la resultant d'ambdues expressions

$$\begin{aligned} \text{Res}(\text{numer}(G_{a1}^3(x, y) - (G_a^{-1})_1^2(x, y)), V_a(x, y) - h, x) &= (y^2 + a)^6 (a^6 - a^5 \\ &+ 3a^4 h - a^4 - 2a^3 h + 3a^2 h^2 - a^2 h - ah^2 + h^3 - ah)^2 (y^4 + 2ay^2 - y^2 - h), \end{aligned}$$

de la qual obtenim la condició per a l'existència de punts 5-periòdics. En aquest cas, la resultant conté el factor que no depèn de la variable y , donat per

$$d_5(a, h) = h^3 + a(3a - 1)h^2 + a(3a^3 - 2a^2 - a - 1)h + a^4(a^2 - a - 1).$$

Així doncs, a partir de l'anàlisi dels factors de les expressions

$$\begin{aligned} \phi_{m,k}(y, h) &:= \text{Res} \left(\text{numer} \left((G_a)_1^{k-m}(x, y) - ((G_a)^{-m})_1(x, y) \right), \right. \\ &\quad \left. \text{numer}(V_a(x, y) - h); x \right), \end{aligned}$$

calculades amb l'ajut del programari Maple v.17 obtenim el següent resultat:

Teorema 3.4.2. *Les d -condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.4.3), corresponents als continus de punts k -periòdics de les aplicacions de McMillan-Gumovski-Mira, per $k \leq 10$, vénen donades per $d_k(a, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned}
 d_3(a, h) &= h + a(a + 1), \\
 d_4(a, h) &= h + a^2, \\
 d_5(a, h) &= h^3 + a(3a - 1)h^2 + a(3a^3 - 2a^2 - a - 1)h + a^4(a^2 - a - 1), \\
 d_6(a, h) &= (h^2 + (2a^2 + 1)h + a^4)(h + a(a + 1)), \\
 d_7(a, h) &= h^6 + 2a(3a + 1)h^5 + a(15a^3 + 10a^2 - a + 3)h^4 + a(20a^5 + 20a^4 \\
 &\quad - 4a^3 + 8a^2 + a + 1)h^3 + a^4(15a^4 + 20a^3 - 6a^2 + 6a + 2)h^2 \\
 &\quad + a^4(6a^6 + 10a^5 - 4a^4 + a^2 - a - 1)h + a^9(a^3 + 2a^2 - a - 1), \\
 d_8(a, h) &= (2h^2 + (4a^2 + 1)h + a^2(2a^2 - 1))(h^4 + 4h^3a^2 + 6h^2a^4 \\
 &\quad + a^2(2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)h + a^8), \\
 d_9(a, h) &= h^9 + 3a(3a - 1)h^8 + a(36a^3 - 24a^2 - 7)h^7 + a(84a^5 - 84a^4 - 41a^2 \\
 &\quad + 6a - 5)h^6 + a(126a^7 - 168a^6 - 99a^4 + 30a^3 - 19a^2 + 4a - 1)h^5 \\
 &\quad + a^2(126a^8 - 210a^7 - 125a^5 + 60a^4 - 26a^3 + 8a^2 - 3a + 1)h^4 \\
 &\quad + a^3(84a^9 - 168a^8 - 85a^6 + 60a^5 - 14a^4 - 3a^2 - 1)h^3 \\
 &\quad + a^7(36a^7 - 84a^6 - 27a^4 + 30a^3 - a^2 - 8a - 1)h^2 \\
 &\quad + a^8(9a^8 - 24a^7 - a^5 + 6a^4 + a^3 - 4a^2 + 1)h + a^{15}(a^3 - 3a^2 + 1), \\
 d_{10}(a, h) &= h^6 + (6a^2 + 3)h^5 + (15a^4 + 12a^2 + 1)h^4 + 2a^4(10a^2 + 9)h^3 \\
 &\quad + 3a^4(5a^2 - 1)(a^2 + 1)h^2 + a^4(a^2 + 1)(6a^4 - 3a^2 + 1)h + a^{12}.
 \end{aligned}$$

3.4.2 Estudi de la integral primera i la regió factible per l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira

A la secció anterior hem trobat d -condicions de periodicitat, en aquesta secció determinem per quins valors dels paràmetres $(a, h) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ les solucions de les d'aquestes condicions es corresponen amb corbes reals

$$\{V_a(x, y) = h\} \cap \mathbb{R}^2 = \{a(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = h\} \cap \mathbb{R}^2 \neq \emptyset.$$

Observem que els punts fixos de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira G_a són el $(0, 0)$ per qualsevol valor $a > 0$; i $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$, on $x_0(a) = \sqrt{1/2 - a}$, quan $0 < a < 1/2$. Aquests punts fixos són punts crítics de la integral primera (3.4.3), i també els únics punts singulars de la Simetria de Lie (3.4.4). Una anàlisi senzilla ens dóna:

Lema 3.4.3. *Els punts fixos de l'aplicació (3.4.1) són punts crítics de la integral primera (3.4.3). Més encara*

- (i) *Si $0 < a < 1/2$, l'origen és una sella de $V_a(x, y)$ i els punts $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$ són mínims absoluts.*
- (ii) *Si $a \geq 1/2$ l'origen és un mínim absolut de $V_a(x, y)$.*

El valor de la integral primera V_a als mínims absoluts ve donat per

$$h_c(a) := \begin{cases} -a^2 + a - 1/4 & \text{si } 0 < a < 1/2, \\ 0 & \text{si } a \geq 1/2. \end{cases} \quad (3.4.5)$$

- (iii) *Quan $0 < a < 1/2$ i $-a^2 + a - 1/4 < h < 0$ les corbes de nivell de $V_a(x, y) = h$ estan formades per dues corbes tancades disjundes, cadascuna d'elles difeomorfa a \mathbb{S}^1 .*
- (iv) *Quan $h > 0$ les corbes de nivell de $V_a(x, y) = h$ són corbes tancades difeomorfes a \mathbb{S}^1 .*
- (v) *Quan $0 < a < 1/2$ la corba de nivell de $V_a(x, y) = 0$ està formada pel punt $(0, 0)$ i dos llaços, començant i acabant en aquest punt. Quan $a \geq 1/2$ la corba de nivell és el punt $(0, 0)$.*

Demostració. Imposant la condició

$$\frac{\partial V_a(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial V_a(x, y)}{\partial y} = 0,$$

obtenim les solucions $(0, 0)$ per qualsevol valor $a > 0$; i $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$, on $x_0(a) = \sqrt{1/2 - a}$, quan $0 < a < 1/2$. Veiem doncs que els tres primers punts coincideixen amb els punts fixos de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira (3.4.1).

(i) i (ii) Considerem la matriu hessiana de la funció $V(x, y)$ en els punts obtinguts i estudiem el signe dels valors propis (o el signe dels determinants de les submatrius menors principals, veure [76]). La matriu, té la següent expressió

$$H_{V_a}(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 2a & 4xy - 1 \\ 4xy - 1 & 2x^2 + 2a \end{pmatrix}.$$

Si l'avaluem al punt $(0, 0)$ obtenim els següents valors propis $\lambda_1 = 2a + 1$ i $\lambda_2 = 2a - 1$. Aleshores:

- si $0 < a < 1/2$ tenim $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 < 0$, per tant l'origen és una sella,

- si $a > 1/2$, $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, per tant l'origen és un mínim. Observem també, que

$$V_a(x, y) = a(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = \frac{1}{2}(x - y)^2 + x^2y^2 \geq 0,$$

i per tant l'origen és un mínim absolut.

Si en canvi avaluem $H_{V_a}(x, y)$ als punts $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$, on $x_0(a) = \sqrt{1/2 - a}$, els valors propis que s'obtenen són $\lambda_1 = -4a + 2$ i $\lambda_2 = 4a$. Així doncs:

- si $0 < a < 1/2$ tenim $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$, per tant $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$ són mínims de la funció $V(x, y)$ que, de fet, són mínims absoluts.

Pel cas $a = 1/2$, és fàcil observar que

$$V_{1/2}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = \frac{1}{2}(x - y)^2 + x^2y^2 \geq 0,$$

i per tant l'origen és un mínim absolut.

El valor de $h_c(a)$ s'obté avaluant la funció en els punts mínims obtinguts.

Per demostrar els enunciats (iii), (iv) i (v), observem que la forma i el número de components connexes de les corbes $V_a(x, y) = h$ es pot obtenir a partir de l'estudi de les funcions $y_{\pm}(x) = (x \pm \sqrt{F(x)})/(x^2 + a)$, on $F(x) := -4ax^4 + (1 - 4a^2 + 4h)x^2 + 4ah$. Aquestes funcions $y_{\pm}(x)$ s'obtenen aïllant la component y a partir de l'expressió $a(x^2 + y^2) + x^2y^2 - xy = h$.

Concretament, la demostració es fa a partir de l'anàlisi del número i posició relativa dels intervals a on la funció $F(x) > 0$. L'anàlisi immediat de la funció $F(x)$ mostra que:

- Si $0 < a < 1/2$ i $h_c(a) < h < 0$, aleshores existeixen únicament dos intervals disjunts (x_1, x_2) , (x_3, x_4) amb $x_1, x_2 < 0$ i $x_3, x_4 > 0$ tals que $F(x) > 0$, la qual cosa implica (iii).
- Per tot valor de $a > 0$, si $h > 0$, existeix un únic interval (x_1, x_2) que conté $x = 0$ tal que $F(x) > 0$, la qual cosa demostra (iv).
- Si $0 < a < 1/2$ i $h = 0$, aleshores existeixen només dos intervals $(x_1, 0)$ i $(0, x_2)$ amb $x_1 < 0$ i $x_2 > 0$ tals que $F(x) > 0$. A més a més, si $a \geq 1/2$ i $h = 0$, $F(0) = 0$ i $F(x) < 0$ per tot $x < 0$, la qual cosa implica (v).

Tot i que ometem la demostració completa de les afirmacions anteriors per no allargar innecessàriament la demostració, com a exemple detallem el cas (a). En efecte, un càlcul demostra que $F'(x)$ s'anul·la a

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{-2a(4a^2 - 4h - 1)}}{4a},$$

on els punts x_{\pm} existeixen si i només si $h > a^2 - 1/4$.

En el cas que $0 < a < 1/2$, és fàcil veure que $a^2 - 1/4 < h_c(a)$, per tant si prenem $h_c(a) < h < 0$ els punts x_{\pm} anteriors, existeixen.

Una comprovació immediata indica que

$$F''(0) = 2(1 - 4a^2 + 4h) > 0 \quad \text{i} \quad F''(x_{\pm}) = -4(1 - 4a^2 + 4h) < 0,$$

per tant $x = 0$ és un mínim relatiu i x_{\pm} són màxims relatius. Un petit càlcul, ens indica que $F(0) = 4ah < 0$ i que $F(x_{\pm}) = 8(1 - 4a^2 + 4h) > 0$. Com que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = -\infty$, existeixen dos intervals de la forma descrita anteriorment.

Els altres dos casos, es fan de manera anàloga. ■

Com a conseqüència dels apartats (i) i (ii) del resultat anterior, obtenim que les solucions de les d -condicions de periodicitat $d_k(a, h) = 0$ corresponen a corbes de nivell $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, V_a(x, y) = h\}$ no buides, per a tot $h \geq h_c(a)$. Per tant, la regió

$$\mathcal{R} = \{(a, h), a > 0 \text{ i } h \geq h_c(a)\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

és la *regió factible* per l'aplicació G_a (vegeu la Figura 1), i en conseqüència obtenim el següent resultat que caracteritza quan les d -condicions formals de periodicitat caracteritzen corbes de nivell no buides:

Corol·lari 3.4.4. *Si existeixen corbes de la forma $\{V_a(x, y) = h\} \subset \mathbb{R}^2$ plenes de punts k -periòdics, aquestes corbes es corresponen a valors $(a, h) \in \{d_k(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R}$.*

Més encara, com a conseqüència de l'existència de la Simetria de Lie (3.4.4), que té els mateixos punts singulars que els punts crítics de G_a , obtenim:

Corol·lari 3.4.5. *Si $(a, h) \in \{d_k(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R}$, i existeix un punt k -periòdic de G_a sobre la corba $\{V_a(x, y) = h\}$, aleshores tota la corba està plena de punts k -periòdics.*

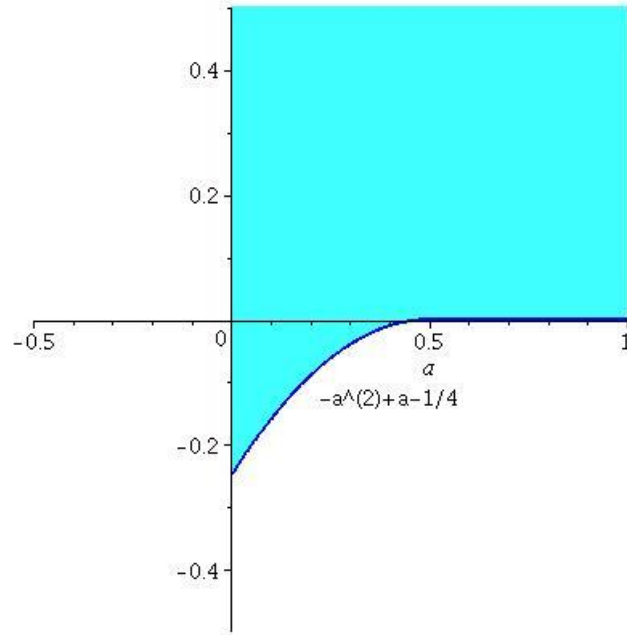


Figura 1. Regió factible per l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira G_a , ombrejada en blau.

Per acabar la secció, i a nivell il·lustratiu, donarem un exemple d'aplicació del mètode exposat a la Secció 3.2.2. En concret, trobarem els valors del paràmetre a pels quals una corba $d_k(a, h) = 0$ (en concret el cas $k = 5$) interseca la frontera de la regió factible \mathcal{R} , tot recordant que la frontera $\partial\mathcal{R}$, ve donada per la corba $h = h_c(a)$ descrita a l'expressió (3.4.5).

Exemple 3.4.6. Ens interessa estudiar aquells parells de (a, h) pels quals $\{d_5(a, h) = 0\}$ interseca amb $\partial\mathcal{R}$ (vegeu la Figura 2), on

$$d_5(a, h) = h^3 + a(3a - 1)h^2 + a(3a^3 - 2a^2 - a - 1)h + a^4(a^2 - a - 1) = 0.$$

A partir del Lema 3.4.3, sabem que quan $a < 1/2$ hi ha dos punts crítics $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$ de la funció V_a , que es corresponen amb dos punts fixos de G_a i que són mínims absoluts de V_a , pels quals $h = h_c(a) = -a^2 + a - 1/4$.

Per trobar a podem aplicar l'Equació (3.2.6), obtenint el següent polinomi en a :

$$\begin{aligned} \text{Res}(V_a(x_0(a), y_0(a)) - h, d_5(a, h); h) &= \text{Res}(-a^2 + a - 1/4 - h, d_5(a, h); h) \\ &= a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{64}, \end{aligned}$$

del qual trobem els valors següents que l'anul·len

$$a_1 := \frac{3}{16} - \frac{1}{16}\sqrt{5} \simeq 0.0477, \quad a_2 := \frac{3}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{5} \simeq 0.3273.$$

Quan $a \geq 1/2$ aleshores existeix un únic punt crític de V_a que és un mínim absolut, localitzat a l'origen, i $h_c(a) = 0$, per tant:

$$\text{Res}(V_a(0,0) - h, d_5(a, h); h) = \text{Res}(-h, d_5(a, h); h) = -a^4(a^2 - a - 1).$$

Aquesta resultant s'anul·la a la regió $a > 0$ pel valor

$$a_3 := \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \simeq 1.6180.$$

En resum, la corba $d_5(a, h) = 0$ interseca $\partial\mathcal{R}$ als punts $p_i = (a_i, h_c(a_i))$, amb $i = 1, 2, 3$ on

$$\begin{aligned} (a_1, h_c(a_1)) &= (a_1, -a_1^2 + a_1 - 1/4) \\ &= \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{16}\sqrt{5}, -\frac{15}{128} - \frac{5}{128}\sqrt{5} \right) \simeq (0.0477, -0.2045), \\ (a_2, h_c(a_2)) &= (a_2, -a_2^2 + a_2 - 1/4) \\ &= \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{5}, -\frac{15}{128} + \frac{5}{128}\sqrt{5} \right) \simeq (0.3273, -0.0298), \\ \text{i } (a_3, h_c(a_3)) &= (a_3, 0) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}, 0 \right) \simeq (1.6180, 0). \end{aligned}$$

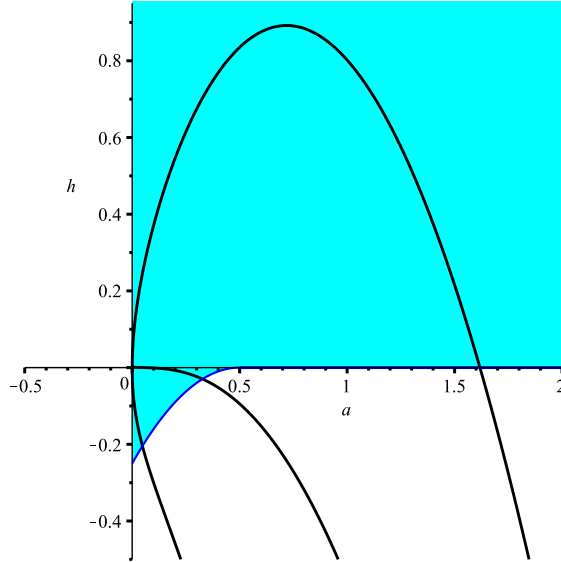


Figura 2. Intersecció de la corba $d_5(a, h) = 0$ amb la regió factible i la seva frontera.

3.4.3 Estudi de la funció número de rotació

Els enunciats (iii) i (iv) del Lemma 3.4.3 descriuen les condicions per les quals les corbes de nivell $\{V_a(x, y) = h\}$ són corbes tancades. L'existència de la simetria de Lie (3.4.4) garanteix que sobre aquestes corbes tancades l'aplicació és conjugada a una rotació. El següent resultat descriu el comportament de la funció número de rotació $\theta(h)$ associada a aquestes corbes, als extrems dels intervals de definició de la funció.

Lema 3.4.7. *Es verifiquen els següents enunciats:*

(i) *Per tot valor de $a > 0$ la funció $\theta(h)$ és contínua per tot $h \in [h_c(a), \infty)$. A més, si $a < 1/2$ la funció és analítica per $h \in (h_c(a), 0) \cup (0, \infty)$, i si $a \geq 1/2$ és analítica per $h \in (h_c(a), \infty)$.*

(ii) *Sigui $\theta_a := \lim_{h \rightarrow h_c^+(a)} \theta(h)$*

$$\theta_a = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arccos(4a - 1) & \text{si } a < 1/2, \\ \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{1}{2a}\right) & \text{si } a \geq 1/2. \end{cases}$$

(iii) *Si $a < 1/2$ aleshores $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0$.*

(iv) *Per tot valor de $a > 0$ s'obté $\lim_{h \rightarrow \infty} \theta(h) = 1/4$.*

Demostració. (i) L'existència de la simetria de Lie ens assegura que sobre cada corba tancada γ_h del conjunt de nivell $\{V = h\}$, la funció nombre de rotació ve donada per $\theta(h) = \tau(h)/T(h)$, on $T(h)$ és el període de l'òrbita periòdica γ_h com a solució del sistema d'equacions diferencials associat a la simetria de Lie i, $\tau(h)$ és tal que $F(x, y) = \varphi(\tau(h); x, y)$ on φ és el flux d'aquesta equació, [27, Teorema 2]. Per tant, $\theta(h)$ és analítica per tot valor de h on $F|_{\gamma_h}$ sigui una rotació, és a dir, per tot valor $h \neq 0$ o bé $h \neq h_c(a)$. L'extensió contínua de $\theta_a(h)$ a $h_c^+(a)$ és una conseqüència directa de la Proposició 8 de [12] (també es pot consultar el Lema 15 de [9], o les eines desenvolupades per provar la Proposició 19 de [26], o l'adaptació que proposem al Teorema 3.3.2). L'extensió contínua a $h = 0$ pel cas $a < 1/2$ es segueix de la demostració de l'apartat (iii).

Els resultats referits anteriorment garanteixen l'existència del límit $\theta_a := \lim_{h \rightarrow h_c(a)} \theta(h)$ i donen el seu valor:

$$\theta_a = \lim_{h \rightarrow h_c^+(a)} \theta(h) = \frac{1}{2\pi} \arccos(\operatorname{Re}(\lambda)), \quad (3.4.6)$$

on λ és qualsevol dels dos valors propis complexos de $DG_a(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$ quan $a < 1/2$ on $x_0(a) = \sqrt{1/2 - a}$, o bé de $G_a(0, 0)$ quan $a \geq 1/2$.

(ii) Estudiem doncs el $\lim_{h \rightarrow h_c^+(a)} \theta(h)$ quan $0 < a < 1/2$. En aquest cas, l'aplicació té per punts fixos $(\pm x_0(a), \pm x_0(a))$. La linealització de l'aplicació G_a en aquests punts ens dóna

$$DG_a(\pm x_0(a), \pm x_0(a)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 8a - 2 \end{pmatrix}$$

i el conjunt dels seus valors propis són:

$$\text{Spec} DG_a(\pm x_0(a), \pm x_0(a)) = \{4a - 1 \pm 2i\sqrt{2a(1 - 2a)}\}.$$

Aplicant l'equació (3.4.6) tenim que

$$\theta_a = \frac{1}{2\pi} \arccos(4a - 1) \in (0, 1/2).$$

Estudiem ara $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h)$ quan $a \geq 1/2$. En aquest cas, l'aplicació té el $(0, 0)$ per punt fix (de fet, sempre existeix, sigui quin sigui el valor del paràmetre a) i, la linealització de l'aplicació G_a en aquest punt ens dóna

$$DG_a(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/a \end{pmatrix}$$

amb el conjunt de valors propis $\text{Spec} DG_a(0, 0) = \left\{ \frac{1 \pm i\sqrt{4a^2 - 1}}{2a} \right\}$. Aplicant altra vegada l'equació (3.4.6), tenim que

$$\theta_a = \lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{1}{2a}\right).$$

(iii) Quan $a < 1/2$, la corba de nivell $\{V_a = 0\}$ està composta pels punts $(0, 0)$ i dos corbes (llaços) començant i acabant en aquest punt (vegeu el Lema 3.4.3 (v)). Sobre aquesta corba l'aplicació no és conjugada a rotació i per tant $\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0$.

(iv) Finalment, per demostrar que $\lim_{h \rightarrow \infty} \theta(h) = 1/4$ considerarem el canvi de variable donat per $(z, w) = (1/x, 1/y)$ el qual conjuga el comportament a l'infinit de G_a amb el comportament a l'origen de la nova aplicació:

$$\widetilde{G}_a(z, w) = \left(w, -\frac{z(aw^2 + 1)}{aw^2 - wz + 1} \right).$$

Fixem-nos que $\widetilde{G}_a(z, w) = (w, -z + O_2(z, w))$ i, la linealització de l'aplicació a l'origen ens dóna

$$D\widetilde{G}_a(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

amb el conjunt de valors propis $\text{Spec} D\widetilde{G}_a(0, 0) = \{\pm i\}$. Amb el mateix argument que als apartats anteriors, tenim que el comportament del número de rotació de \widetilde{G}_a a l'origen, verifica

$$\theta_a = \frac{1}{2\pi} \arccos(0) = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}.$$

■

3.4.4 Anàlisi dels continus de punts 5-periòdics

En aquesta secció veurem com determinar els valors del paràmetre a pel qual les d -condicions de periodicitat es corresponen amb corbes de nivell de V_a no buides a \mathbb{R}^2 , i determinarem el nombre d'aquestes corbes de nivell. Aquesta és una tasca feixuga que cal repetir per cada valor k del període que es vulgui estudiar, per aquesta raó mostrem tots els detalls només pel cas $k = 5$. La combinació d'aquesta anàlisi amb els resultats sobre el comportament als extrems dels intervals de definició del número de rotació, desenvolupat a la Secció 3.4.3, ens permetrà caracteritzar els continus d'òrbites 5-periòdiques.

Així doncs ens interessa, estudiar aquells parells de (a, h) pels quals $\{d_5(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$ (vegeu la Figura 3), on

$$d_5(a, h) = h^3 + a(3a - 1)h^2 + a(3a^3 - 2a^2 - a - 1)h + a^4(a^2 - a - 1) = 0.$$

El resultat principal d'aquesta secció és:

Teorema 3.4.8. *Considerem l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira donada per (3.4.1) amb $a > 0$, i definim*

$$a_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{16} \simeq 0.048 < a_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{16} \simeq 0.328 < a_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618.$$

Aleshores el conjunt de punts reals 5-periòdics ve donat per les corbes de nivell $\{V_a = h\}$ no buides, per a valors de la h satisfent $d_5(a, h) = 0$. Aquests conjunts estan formats per:

- (i) *Cinc corbes tancades disjunes difeomorfes a \mathbb{S}^1 quan $a \in (0, a_1)$. Aquestes corresponen a dos valors negatius i un de positiu de h .*
- (ii) *Tres corbes tancades disjunes difeomorfes a \mathbb{S}^1 quan $a \in [a_1, a_2)$. Aquestes corresponen a un valor positiu i un de negatiu per a la h .*
- (iii) *Una corba tancada difeomorfa a \mathbb{S}^1 quan $a \in [a_2, a_3)$, corresponent a un valor positiu de la h .*

(iv) El conjunt buit quan $a \geq a_3$.

Més encara, el nombre de rotació sobre les corbes de nivell corresponents al valor més petit de h donats a (i) és $2/5$ i sobre els altres nivells és $1/5$. La situació general s'il·lustra a les Figures 3, 5, 6 i 7.

Els valors a_1 , a_2 i a_3 de l'anterior teorema, són els valors corresponents a la intersecció de la corba $d_5(a, h) = 0$ amb ∂R ja trobats a l'Exemple 3.4.6. Recordem que aquells valors determinen els intervals de valors del paràmetre a pels quals poden existir o variar el número de corbes de nivell de $\{V_a = h\}$ no buides a \mathbb{R}^2 , tals que els parells (a, h) satisfan la d -condició de 5-periodicitat.

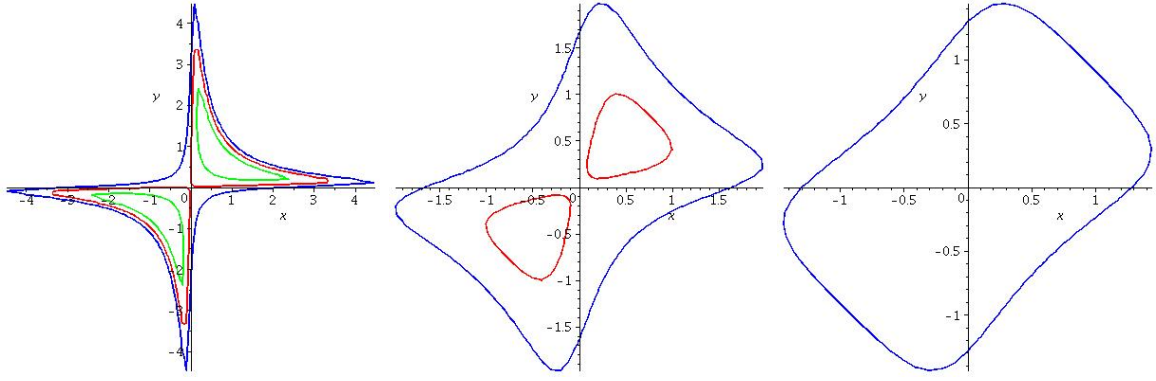


Figura 3. Corbes de nivell típiques pels casos (i), (ii) i (iii) del Teorema 3.4.8.

Per demostrar el Teorema 3.4.8 utilitzarem el següent resultat, obtingut a partir d'una combinació dels resultats obtinguts a [44] i [45], que per completesa hem enunciat a l'Apèndix 6.A. Denotem $\Delta_x(P)$ al discriminant del polinomi $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, és a dir,

$$\Delta_x(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{a_n} \text{Res}(P(x), P'(x); x),$$

on $\text{Res}(P(x), P'(x); x)$ és la resultant de P i de P' .

Lema 3.4.9. *Sigui*

$$C_a(h) = g_n(a)h^n + g_{n-1}(a)h^{n-1} + \dots + g_1(a)h + g_0(a),$$

una família de polinomis reals depenent a la seva vegada polinòmicament d'un paràmetre real a . Sigui $J_a = (\phi(a), +\infty)$ on $\phi(a)$ és una aplicació contínua. Suposem que existeix un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

(i) Existeix un $a_0 \in I$, de manera que C_{a_0} té exactament r zeros simples a J_{a_0} .

(ii) Per tot $a \in I$, $C_a(\phi(a)) \cdot g_n(a) \neq 0$.

(iii) Per tot $a \in I$, $\Delta_h(C_a) \neq 0$.

Aleshores per tot $a \in I$, $C_a(h)$ té exactament r zeros a J_a i tots ells són simples.

Demostració. Observem que les arrels (reals o complexos) de $C_a(h)$ depenen contínuament del paràmetre a , donat que $g_n(a) \neq 0$. Aquesta condició és conseqüència de la condició (ii), la mateixa que ens assegura que no hi hauran arrels que traspassin la frontera de J_a al variar el paràmetre a . Aleshores, la variació del nombre d'arrels reals podria ser deguda a l'aparició d'alguna arrel múltiple, ja sigui per la col·lisió de dos arrels reals o bé per la col·lisió d'un parell d'arrels complexos conjugades. En qualsevol cas, aquesta circumstància implicaria que $\Delta_h(C_a)$ s'hauria d'anul·lar. Com que per (iii) tenim que $\Delta_h(C_a) \neq 0$, no ens apareixen arrels reals dobles i per tant, per tot $a \in I$ el nombre d'arrels reals de $C_a(h)$ és el mateix. ■

Lema 3.4.10. *Es verifiquen els següents enunciat:*

- (i) Per tot $a \in (0, a_1)$, existeixen com a mínim dos nivells d'energia $h_1, h_2 \in (h_c(a), 0)$ tals que $\theta(h_1) = 2/5$ i $\theta(h_2) = 1/5$. També existeix com a mínim un nivell $h_3 > 0$ tal que $\theta(h_3) = 1/5$.
- (ii) Per tot $a \in [a_1, a_2)$ existeix almenys un valor $h_2 \in (h_c(a), 0)$ tal que $\theta(h_2) = 1/5$, i almenys un nivell $h_3 > 0$ tal que $\theta(h_3) = 1/5$.
- (iii) Per tot $a \in [a_2, a_3)$ existeix almenys un nivell d'energia $h_3 > 0$ tal que $\theta(h_3) = 1/5$.

Tots els nivells d'energia descrits anteriorment corresponen a continus d'òrbites periòdiques de període 5.

Demostració. Quan $0 < a < 1/2$, el Lema 3.4.7 garanteix que el número de rotació $\theta(h)$ és una funció contínua definida a $(h_c(a), 0) \cup (0, +\infty)$. També sabem que als extrems de l'interval $(h_c(a), 0)$ la funció tendeix a $\theta_a = (1/2\pi)\arccos(4a - 1)$ i a 0, respectivament. Per altra banda, la funció del paràmetre a , θ_a , varia monòtonament de $1/2$ a 0 quan $0 < a < 1/2$ (vegeu la Figura 4). Aleshores, un petit càlcul mostra que

- si igualement $2/5 = \theta_a$, obtenim $a = a_1 = \frac{1}{4} \left(\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) + 1 \right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{16} \simeq 0.0477$,
i que
- si igualement $1/5 = \theta_a$, obtenim $a = a_2 = \frac{1}{4} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) + 1 \right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{16} \simeq 0.3273$.

Per tant, per tot $a \in (0, a_1)$, i per la continuïtat de $\theta(h)$, existeixen com a mínim dos nivells d'energia $h_1, h_2 \in (h_c(a), 0)$ tals que $\theta(h_1) = 2/5$ i $\theta(h_2) = 1/5$ corresponents a continus d'òrbites periòdiques de període 5. Per $a \in [a_1, a_2)$ existeix almenys un valor $h_2 \in (h_c(a), 0)$ tal que $\theta(h_2) = 1/5$ corresponent a continus de període 5.

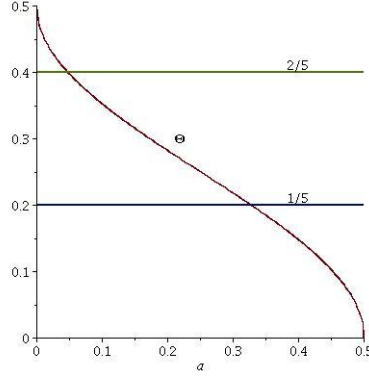


Figura 4. Valors de θ_a en funció del paràmetre a , quan $a < 1/2$.

També quan $0 < a < 1/2$, la funció $\theta(h)$ també està definida quan $h \in (0, +\infty)$. els seus valors límit als extrems d'aquest interval són 0 i $1/4$, per tant sempre existeix almenys $h_3 > 0$ tal que $\theta(h_3) = 1/5$. Queden, doncs demostrats els enunciats (i), (ii) i part del (iii).

Quan $a \geq 1/2$, la funció nombre de rotació $\theta(h)$ està definida a $(0, +\infty)$. En aquest cas $\lim_{h \rightarrow 0^+} \theta(h) = \theta_a = (1/2\pi)\arccos(1/2a)$. La funció del paràmetre a , θ_a varia monòtonament entre 0 i $1/4$ quan $a \in (1/2, \infty)$, per tant mai no pot prendre el valor $2/5$. Igualant $1/5 = \theta_a$, obtenim $a = a_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1.618$. Per tant, per tot $a \in (1/2, a_3)$ existeix almenys un nivell d'energia $h_3 > 0$ tal que $\theta(h_3) = 1/5$, amb el que queda demostrat l'enunciat (iii). ■

Prova del Teorema 3.4.8. Per tal d'aplicar el Lema 3.4.9, reescrivim l'expressió de $d_5(a, h)$ com la família uniparamètrica de polinomis en h :

$$C_a(h) := d_5(a, h) = g_3(a)h^3 + g_2(a)h^2 + g_1(a)h + g_0(a),$$

on

$$\begin{aligned} g_3(a) &= 1, \\ g_2(a) &= a(-1 + 3a), \\ g_1(a) &= a(-1 - a - 2a^2 + 3a^3), \\ g_0(a) &= a^4(-1 - a + a^2). \end{aligned}$$

Observem que per tot $a > 0$

$$\Delta_h(C_a(h)) = a^3(4 + 13a + 32a^2) > 0,$$

i per tant sempre es verifica la hipòtesi (iii) del Lema 3.4.9.

Primerament considerem el cas $a \in (0, \frac{1}{2})$. Recordem que $(a, h) \in \mathcal{R}$ si i només si $h \in [h_c(a), +\infty)$. Fixem, doncs, $\phi(a) := h_c(a) = -a^2 + a - 1/4$, i per tant $J_a = (-a^2 + a - 1/4, +\infty)$.

Com que $g_3(a) \neq 0$, pel Lema 3.4.9, el nombre de zeros de $C_a(h)$ es mantindrà constant en cada interval I en el que $C_a(\phi(a))$ no s'anul·li. En el nostre cas

$$C_a(\phi(a)) = C_a\left(-a^2 + a - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}a - a^2 - \frac{1}{64}$$

s'anul·la per als valors

$$a_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{16} \text{ i } a_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{16}.$$

Aquests valors ens marquen els extrems de tres intervals $I_1 = (0, a_1)$, $I_2 = (a_1, a_2)$ i $I_3 = (a_2, 1/2)$, a on el polinomi $C_a(h)$ té un nombre constant de arrels en h . A continuació determinarem el nombre d'arrels de $C_a(h)$ en cadascun d'aquests intervals.

Prenem $a_{01} \in (0, a_1)$, per exemple $a_{01} = 1/50$ i l'avaluem

$$C_{a_{01}}(h) = h^3 - \frac{47}{2500}h^2 - \frac{127597}{6250000}h - \frac{2549}{15625000000}.$$

Aquest polinomi cúbic, té tres arrels localitzades a $\left[\frac{-3}{16}, \frac{-1}{8}\right]$, $\left[\frac{-1}{16}, 0\right]$, $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right]$, que ens donen dos valors per la h negatius i un de positiu. Fixem-nos que

$$\phi(a_{01}) = \phi\left(\frac{1}{50}\right) = -\frac{144}{625} \simeq -0.2304 < -\frac{3}{16} \simeq -0.1875,$$

i per tant totes les arrels estan per sobre de la corba $h = \phi(a)$, i els corresponents parells (a_{01}, h) estan a la regió factible. Finalment, el Lema 3.4.9 ens assegura que per tot $a \in (0, a_1)$ tenim tres zeros reals simples per a $C_a(h)$. Com que $g_0(a) \neq 0$ per tot $a \in I_1$, dos dels zeros són negatius i un de positiu, els quals s'ajusten a parells $(a, h) \in \{d_5(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R}$ per $a \in (0, a_1)$. Pels apartats (iii) i (iv) del Lema 3.4.3, aquests valors donen lloc a cinc corbes tancades disjunctes, difeomorfes a \mathbb{S}^1 . El Lema 3.4.10 garanteix que aquestes corbes estan plenes de punts 5-periòdics, són les úniques, i tenen el número de rotació descrit a l'enunciat, amb el que queda demostrat el cas (i).

Considerem ara $a_{02} \in (a_1, a_2)$, agafant per exemple $a_{02} = 1/5$. Aleshores,

$$C_{a_{02}}(h) = h^3 - \frac{2}{25}h^2 - \frac{157}{625}h - \frac{29}{15625},$$

és un polinomi cúbic amb tres arrels localitzades a $\left[\frac{-1}{2}, \frac{-7}{16}\right]$, $\left[\frac{-1}{16}, 0\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right]$, que ens donen dos valors per la h negatius i un de positiu. Per altra banda, tenim també

$$\phi(a_{02}) = \phi\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{9}{100} = -0.09 > -\frac{7}{16} \simeq -0.4375,$$

per la qual cosa, només hi hauran dos valors del paràmetre h (un de positiu i un de negatiu) per sobre de la corba $\phi(a)$, i per tant corresponent a dos parells (a_{02}, h) a la regió factible.

Un càlcul similar a l'anterior demostra que per $a = a_1$, el polinomi $C_a(h)$ té dos arrels per sobre de la corba $h = \phi(a)$. Aquests resultats, juntament amb el fet que $g_0(a) \neq 0$, ens asseguren que per tot $a \in [a_1, a_2)$ tenim dos zeros reals simples (un de negatiu i un de positiu), que corresponen a parells $(a, h) \in \{d_5(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R}$ per $a \in [a_1, a_2)$. Raonant de manera similar al cas anterior, quan $a \in [a_1, a_2)$ hi ha almenys un valor positiu i un de negatiu per a h corresponents els dos a un nombre de rotació $1/5$. Queda demostrat doncs, l'enunciat (ii).

Continuem efectuant el mateix procés per a $a_{03} \in (a_2, 1/2)$, tot considerant $a_{03} = 2/5$. Aleshores

$$C_{a_{03}}(h) = h^3 + \frac{2}{25}h^2 - \frac{382}{625}h - \frac{496}{15625},$$

és un polinomi cúbic amb tres arrels localitzades a $\left[\frac{-817}{1024}, \frac{-51}{64}\right]$, $\left[\frac{-27}{512}, \frac{-53}{1024}\right]$, $\left[\frac{787}{1024}, \frac{197}{256}\right]$. Com abans, obtenim dos valors per la h negatius i un de positiu, però ara en canvi tenim

$$\phi(a_{03}) = \phi\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-1}{100} = -0.01 > -\frac{53}{1024} \simeq -0.05176$$

i això implica que només hi ha un dels valors trobats que està per sobre de la corba estudiada. Novament, un càlcul demostra que per $a = a_2$, el polinomi $C_{a_2}(h)$ té una arrel per sobre de la corba $h = \phi(a)$. Com en els casos anteriors, el Lema 3.4.9 i el fet que $g_0(a) \neq 0$, ens assegura que per tot $a \in [a_2, 1/2)$ tenim un zero real simple positiu, que correspon a un únic parell $(a, h) \in \{d_5(a, h) = 0\} \cap \mathcal{R}$ per $a \in (a_2, 1/2)$. De la mateixa manera que als casos anteriors, quan $a \in [a_2, 1/2)$ hi ha almenys un valor positiu de h que es correspon amb un nombre de rotació igual a $1/5$. Queda demostrat doncs, el cas (iii).

En resum, quan $a \in (0, 1/2)$, hem provat que les corbes de nivell reals trobades per la relació $d_5(a, h) = 0$ estan plenes de punts 5-periòdics i tenen com a nombres de rotació els definits a l'enunciat del teorema.

Ara continuem el nostre estudi per als valors del paràmetre a tals que $a \geq \frac{1}{2}$, però fixem-nos que la frontera de la nostra regió factible canvia a $h = h_c(a) = 0$. Considerem $\phi(a) := h_c(a) = 0$, i per tant $h \in (\phi(a), +\infty) = (0, +\infty)$ i $J_a = (0, +\infty)$, per $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$. Avaluant $C_a(h)$ sobre aquest segon tram de corba, per tot $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, tenim:

$$C_a(0) = a^4(a^2 - a - 1)$$

el qual s'anul·la per als valors del paràmetre a

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq -0.618, \quad 0, \quad \text{i} \quad a_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618.$$

Al considerar $a \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ només tindrem en compte el valor a_3 , que ens determina dos nous intervals a estudiar on $C_a(h)$ té un nombre constant d'arrels: $(1/2, a_3)$ i (a_3, ∞) . Per tant, podem reduir el problema a estudiar els valors $a = 1/2$, $a = a_3$ i dos nombres (racional), un a cadascun dels intervals $(1/2, a_3)$ i (a_3, ∞) . La resta de l'estudi segueix com als casos anteriors, per la qual cosa, ometem els detalls. ■

A continuació donem algunes orbites 5-periòdiques concretes amb els números de rotació descrits pels resultats anteriors.

Exemple 3.4.11. Vegem ara una òrbita periòdica concreta. Considerem el primer cas, on el paràmetre $a = 1/50$. El valor de l'energia h de la corba de nivell que satisfà la condició $d_5(a, h) = 0$ ve donat per

$$h_1 \simeq -0.1338, \quad h_2 \simeq -7.99 \cdot 10^{-6}, \quad h_3 \simeq 0.1526.$$

Tenim doncs tres solucions reals, tal i com hem demostrat al Teorema 3.4.8.

Prenem un punt de la corba de nivell $V_a(x, y) = h$. Per exemple per al primer dels valors trobats, és a dir, el cas (a, h_1) amb $U_1 = (x, y) \simeq (0.5, 1.5119)$ obtenim:

$$\begin{aligned} U_2 &= G_a(U_1) \simeq (1.5119, 0.1557), \\ U_3 &= G_a^2(U_1) \simeq (0.1557, 2.0074), \\ U_4 &= G_a^3(U_1) \simeq (2.0074, 0.34), \\ U_5 &= G_a^4(U_1) \simeq (0.34, 0.5), \\ U_1 &= G_a^5(U_1) \simeq (0.5, 1.5119). \end{aligned}$$

Obtenim, doncs, un punt 5-periòdic. La corba de nivell $V_a(x, y) = h_1$ correspon a un continu de punts 5-periòdics i l'aplicació restringida a aquesta corba és conjugada a una

rotació amb nombre de rotació $2/5$ (Figura 5).

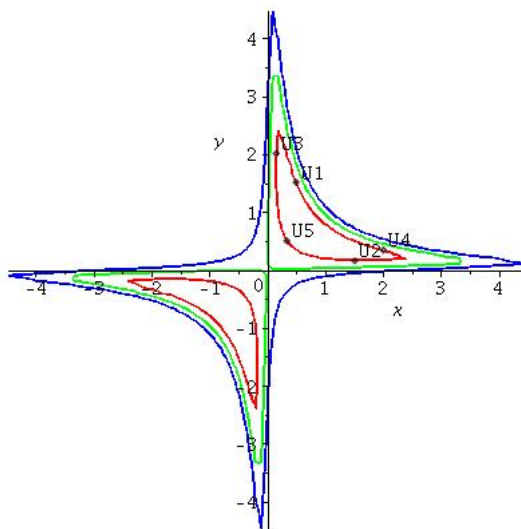


Figura 5. Continu de punts 5-periòdics corresponents a la corba de nivell $V_a(x, y) = h_1$.

Si considerem (a, h_2) amb $C_1 = (x, y) \simeq (0.5, 1.8418)$ obtenim:

$$\begin{aligned} C_2 &= G_a(C_1) \simeq (1.8418, 0.0398), \\ C_3 &= G_a^2(C_1) \simeq (0.0398, 0.001), \\ C_4 &= G_a^3(C_1) \simeq (0.001, 0.0101), \\ C_5 &= G_a^4(C_1) \simeq (0.0101, 0.5), \\ C_1 &= G_a^5(C_1) \simeq (0.5, 1.8418), \end{aligned}$$

un punt 5-periòdic. La corba de nivell $V_a(x, y) = h_2$ correspon a un continu de punts 5-periòdics i l'aplicació restringida a aquesta corba és conjugada a una rotació amb nombre de rotació $1/5$ (Figura 6).

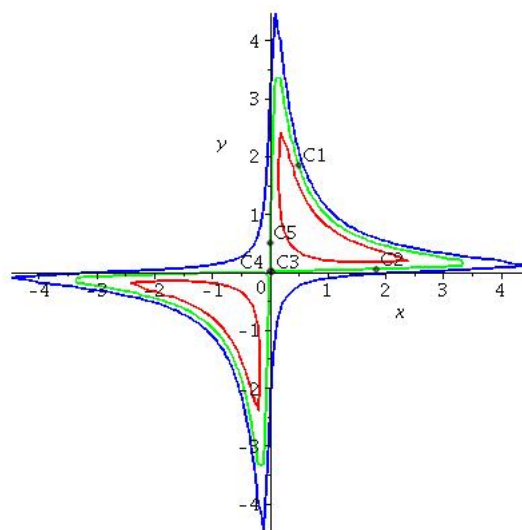


Figura 6. Continu de punts 5-periòdics corresponents a la corba de nivell $V_a(x, y) = h_2$.

Finalment, per (a, h_3) considerem $P_1 = (x, y) \simeq (0.5, 2.1108)$ i veiem com evoluciona sota l'efecte de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira

$$\begin{aligned} P_2 &= G_a(P_1) \simeq (2.1108, -0.0284), \\ P_3 &= G_a^2(P_1) \simeq (-0.0284, -3.4744), \\ P_4 &= G_a^3(P_1) \simeq (-3.4744, -0.259), \\ P_5 &= G_a^4(P_1) \simeq (-0.259, 0.5), \\ P_1 &= G_a^5(P_1) \simeq (0.5, 2.1108), \end{aligned}$$

obtenim un punt 5-periòdic. Així doncs, la corba de nivell $V_a(x, y) = h_1$ correspon a un continu de punts 5-periòdics i l'aplicació restringida a aquesta corba és conjugada a una rotació amb nombre de rotació $1/5$. Vegeu la Figura 7.

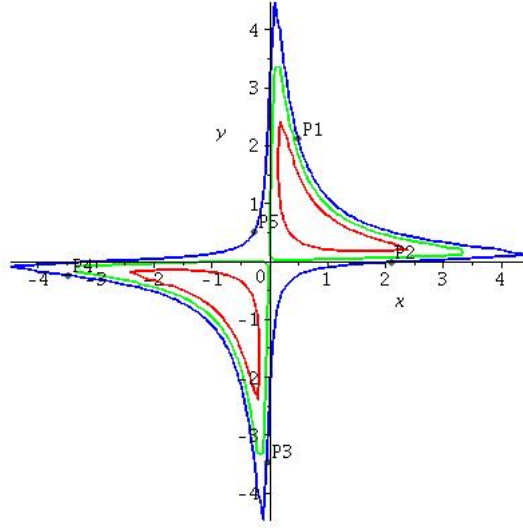


Figura 7. Continu de punts 5-periòdics corresponents a la corba de nivell $V_a(x, y) = h_3$.

3.5 Aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica

En aquesta secció considerarem el sistema dinàmic discret generat per una recurrència del tipus Gumovski–Mira amb coeficients 2-periòdics. Aquestes recurrències han estat estudiades a [29] i [35]. Com a la secció anterior, determinarem per a quins valors dels paràmetres és possible que existeixi un continu de punts periòdics. Sigui doncs la recurrència

$$x_{n+2} = -x_n + \frac{x_{n+1}}{\beta_n + x_{n+1}^2},$$

amb

$$\beta_n = \begin{cases} a > 0 & \text{si } n = 2k, \\ b > 0 & \text{si } n = 2k + 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

o de manera equivalent, l'*aplicació de composició* associada $G_{b,a} = G_b \circ G_a$ (amb G_a i G_b definides per (3.4.1))

$$G_{b,a}(x, y) = \left(-x + \frac{y}{a + y^2}, -y + \frac{(a + y^2)(y - x(a + y^2))}{b(a + y^2)^2 + (y - x(a + y^2))^2} \right), \quad (3.5.1)$$

anomenada *aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica*, la qual és contínua i diferenciable, amb inversa

$$G_{b,a}^{-1}(x, y) = \left(-\frac{Ax^5 - yx^4 + 2bAx^3 + b(by^2 + ab - 1)x + b^2y}{Ax^4 - 2yx^3 + (2by^2 + 2ab + 1)x^2 - 2byx + b^2A}, -y + \frac{x}{x^2 + b} \right) \quad (3.5.2)$$

també contínua i diferenciable (on $A = y^2 + a$, per alleugerir la notació). Considerem també la funció

$$V_{b,a}(x, y) = ax^2 + by^2 + x^2y^2 - xy, \quad (3.5.3)$$

que és integral primera de $G_{b,a}$. Com al cas anterior, un càlcul immediat demostra que $\det(DG_{b,a}(x, y)) \equiv 1$, i per tant l'aplicació $G_{b,a}$ és integrable i preserva la mesura de Lebesgue. Per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{U} : V_{b,a}(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació $G_{b,a}$ és conjugada a una rotació i aquells nivells d'energia que corresponen a un nombre de rotació racional formen continus de punts periòdics. De forma alternativa, notem que això també es dedueix del fet que l'aplicació $G_{b,a}$ té la simetria de Lie

$$X_{b,a}(x, y) = (x - 2by - 2x^2y, 2ax - y + 2xy^2), \quad (3.5.4)$$

vegeu [29].

L'existència de corbes de nivell de $V_{b,a}$ tancades està garantida, per exemple, pel fet que alguns punts fixos de $G_{b,a}$ són mínims absoluts de $V_{b,a}$ (vegeu [29]).

3.5.1 Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat.

A continuació, apliquem amb detall el mètode descrit a la Secció 3.2.1, per tal de trobar les d -condicions de periodicitat de l'aplicació de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdica. Com abans, analitzem els factors de les expressions (3.2.3) calculades amb l'ajut del programari Maple v.17, i obtenim el següent resultat:

Teorema 3.5.1. *Les d -condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.5.3), corresponents als continus de punts k -periòdics de les aplicacions de McMillan-Gumovski-Mira 2-periòdiques, per $k \leq 6$, vénen donades per $d_k(a, b, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} d_2(a, b, h) &:= ba + h, \\ d_3(a, b, h) &:= (h^2 + (2ab + 1)h + a^2b^2)(h^2 + 2abh + ab(ab - 1)), \\ d_4(a, b, h) &:= (h^4 + 4abh^3 + 6a^2b^2h^2 + ab(4a^2b^2 + 1)h + a^4b^4) \\ &\quad \times (2h^2 + (4ab + 1)h + ab(2ab - 1)), \\ d_5(a, b, h) &:= (h^6 + (6ab + 3)h^5 + (15a^2b^2 + 12ab + 1)h^4 + 2a^2b^2(10ab + 9)h^3 \\ &\quad + 3a^2b^2(ab + 1)(5ab - 1)h^2 + a^2b^2(ab + 1)(6a^2b^2 - 3ab + 1)h + a^6b^6) \\ &\quad \times (h^6 + 6ah^5b + 3ab(5ab - 1)h^4 + 2ab(10a^2b^2 - 6ab - 1)h^3 \\ &\quad + ab(15a^3b^3 - 18a^2b^2 - 3ab - 1)h^2 + 6a^4b^4(ab - 2)h + a^4b^4 \\ &\quad \times (a^2b^2 - 3ab + 1)), \\ d_6(a, b, h) &:= (3h^4 + (12ab + 1)h^3 + ab(18ab + 1)h^2 + ab(12a^2b^2 - ab + 1)h \\ &\quad + a^3b^3(3ab - 1))(h^8 + 8h^7ab + 28a^2b^2h^6 + 2ab(28a^2b^2 + 3)h^5 \\ &\quad + 2ab(35a^3b^3 + 12ab + 2)h^4 + ab(56a^4b^4 + 36a^2b^2 + 4ab + 1)h^3 \\ &\quad + a^2b^2(28a^4b^4 + 24a^2b^2 - 4ab - 1)h^2 + a^3b^3(8a^4b^4 + 6a^2b^2 - 4ab + 1)h \\ &\quad + a^8b^8). \end{aligned}$$

3.6 Aplicació de Lyness

Considerem el sistema dinàmic discret generat per la recurrència $x_{n+2} = (a + x_{n+1})/x_n$, amb $a > 0$ paràmetre real, o de manera equivalent, l'aplicació associada

$$F_a(x, y) = \left(y, \frac{a + y}{x}\right), \quad (3.6.1)$$

anomenada *aplicació de Lyness* i, definida al conjunt obert $\mathcal{Q}^+ = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. L'estudi detallat d'aquesta aplicació es pot trobar a [8, 10, 48] i [92], així com a les Seccions 2.1 i 2.2.1 del Capítol 2.

Aquesta aplicació és contínua, diferenciable amb aplicació inversa

$$F_a^{-1}(x, y) = \left(\frac{a + x}{y}, x\right) \quad (3.6.2)$$

també contínua i diferenciable. Tenim doncs un difeomorfisme en el primer quadrant del pla.

Considerem també la funció

$$V_a(x, y) = \frac{(x + 1)(y + 1)(x + y + a)}{xy} \quad (3.6.3)$$

que és integral primera de F_a .

De manera anàloga a les seccions anteriors, volem determinar per a quins valors del paràmetre és possible que existeixi un continu de punts periòdics. Observem que tenim una integral primera V_a que preserva una mesura absolutament contínua respecte de la mesura de Lebesgue amb densitat $\nu = 1/(xy)$ diferenciable a \mathcal{Q}^+ i, amb una simetria de Lie donada per:

$$X_a(x, y) = \left(\frac{(x + 1)(x + a - y^2)}{y}, \frac{-(y + 1)(y + a - x^2)}{x}\right) \quad (3.6.4)$$

(vegeu [27]). Per tant, si existeixen corbes de nivell de la integral primera V_a tancades, podrem garantir l'existència de continus de punts periòdics sobre aquests conjunts de nivell. L'existència d'aquestes corbes de nivell tancades està garantida, per exemple, pel fet que el punt fix de F_a a \mathcal{Q}^+ és un mínim absolut de V_a (vegeu [10] i [14]).

Per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{Q}^+ : V_a(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació F_a és conjugada a una rotació i, aquells nivells que corresponen a un nombre de rotació racional formen continus de punts periòdics.

3.6.1 Expressió explícita de les d -condicions de periodicitat.

A continuació, apliquem amb detall el mètode descrit a la Secció 3.2.1, per tal de trobar les d -condicions de periodicitat de l'aplicació de Lyness. Com en els casos anteriors, analitzem els factors de l'expressió (3.2.3), calculats amb l'ajut del programari esmentat i, fins allà on ens ha permès aquesta tecnologia. A partir d'això, obtenim el següent resultat:

Teorema 3.6.1. *Les d -condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.6.3), corresponents als continus de punts k -periòdics de les aplicacions de Lyness, per $k \leq 24$, vénen donades per $d_k(a, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned}
 d_7(a, h) &:= ha - a + 1, \\
 d_8(a, h) &:= ah + (a - 1)^2, \\
 d_9(a, h) &:= -ha + (a - 1)(a^2 - a + 1), \\
 d_{10}(a, h) &:= (a + 1)ah - a + 1, \\
 d_{11}(a, h) &:= -a^3h^2 + a(2a - 1)(a - 1)h + (a - 1)^4, \\
 d_{12}(a, h) &:= a^2h^2 + a(a - 1)(a - 3)h + (a^2 - 2a + 2)(a - 1)^2, \\
 d_{13}(a, h) &:= -h^3a^3 - a^2(a - 1)(2a - 3)h^2 + a(a^2 + 3)(a - 1)^3h - (a - 1)^4, \\
 d_{14}(a, h) &:= -h^2a^2 + a(a - 1)(a^3 + a^2 - 3a + 2)h + (a - 1)^5, \\
 d_{15}(a, h) &:= -a^3(a^2 + a + 1)h^3 + 3a^2(a - 1)(a^2 + 1)h^2 + a(2a^3 - 6a^2 + 3a - 3) \\
 &\quad \times (a - 1)^2h + (a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1)(a - 1)^3, \\
 d_{16}(a, h) &:= h^3a^5 - a^2(a - 1)(4a^2 - a - 1)h^2 + a(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 2)(a - 1)^2h \\
 &\quad - (a - 1)^4, \\
 d_{17}(a, h) &:= -a^6h^5 - 2a^5(a - 1)(a - 3)h^4 - a^3(3a^3 - 9a^2 + 13a - 1)(a - 1)^2h^3 \\
 &\quad + a^2(a^5 - a^4 + 6a^3 - 15a^2 + 16a - 3)(a - 1)^3h^2 - a(6a^3 - 14a^2 + 12a \\
 &\quad - 3)(a - 1)^4h - (a - 1)^9, \\
 d_{18}(a, h) &:= -a^4h^4 - a^3(a - 1)(a^2 + 3a - 5)h^3 + 10a^2(a - 1)^3h^2 + a(4a - 9)(a - 1)^4h \\
 &\quad + (a^2 - 3a + 3)(a - 1)^5, \\
 d_{19}(a, h) &:= a^6h^6 - a^5(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 - 5a + 6)h^5 + a^4(4a^4 - 2a^3 + 13a^2 - 24a \\
 &\quad + 15)(a - 1)^2h^4 + a^3(3a^5 - 15a^4 + 22a^3 - 39a^2 + 45a - 20)(a - 1)^3h^3 \\
 &\quad + a^2(2a^6 - 13a^5 + 30a^4 - 38a^3 + 46a^2 - 41a + 15)(a - 1)^4h^2 + a(a^4 - 2a^3 \\
 &\quad + 4a^2 + 6)(a - 1)^8h - (a - 1)^9,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{20}(a, h) &:= (a-1)((a^2+1)a^5h^5 + a^4(a-1)(a^3-7a^2+5a-5)h^4 + a^3(a^4-10a^3 \\
 &\quad + 26a^2-20a+10)(a-1)^2h^3 + a^2(a^5-9a^4+29a^3-45a^2+30a-10) \\
 &\quad \times (a-1)^3h^2 + a(a^6-4a^5+14a^4-30a^3+35a^2-20a+5)(a-1)^4h \\
 &\quad + (a-1)^{10}), \\
 d_{21}(a, h) &:= -a^9h^6 - a^5(a-1)(2a^4-8a^3+a^2+a+1)h^5 - a^4(3a^5-16a^4 \\
 &\quad + 25a^3-5a^2+a-5)(a-1)^2h^4 - a^3(4a^6-15a^5+41a^4-52a^3+25a^2 \\
 &\quad - 14a+10)(a-1)^3h^3 + a^2(a^6+a^5+7a^4-18a^3+33a^2-6a+10) \\
 &\quad \times (a-1)^6h^2 + a(a^6+a^5-14a^4+27a^3-27a^2+9a-5)(a-1)^7h \\
 &\quad + (a^6-5a^5+11a^4-13a^3+9a^2-3a+1)(a-1)^8, \\
 d_{22}(a, h) &:= -a^7h^6 - a^5(a-1)(4a^2-8a-1)h^5 - 5a^4(2a^3-5a^2+4a+1) \\
 &\quad \times (a-1)^2h^4 + a^3(a^6+3a^5-14a^4+40a^3-50a^2+20a+10) \\
 &\quad \times (a-1)^3h^3 + a^2(2a^6-15a^5+33a^4-50a^3+40a^2-5a-10) \\
 &\quad \times (a-1)^4h^2 + a(a^7-5a^6+13a^5-19a^4+20a^3-10a^2-4a+5) \\
 &\quad \times (a-1)^5h - (a-1)^8, \\
 d_{23}(a, h) &:= a^{10}h^9 + 2a^9(a-1)(3a-5)h^8 - a^8(a^5+2a^4+3a^3-17a^2+50a-45) \\
 &\quad \times (a-1)^2h^7 + a^6(5a^6+41a^4-120a^3+186a^2-117a+1)(a-1)^3h^6 \\
 &\quad + a^5(4a^7-24a^6+51a^5-185a^4+360a^3-396a^2+197a-6)(a-1)^4h^5 \\
 &\quad + a^4(3a^7-24a^6+61a^5-114a^4+276a^3-319a^2+216a-15)(a-1)^6h^4 \\
 &\quad + a^3(2a^8-16a^7+48a^6-83a^5+151a^4-294a^3+311a^2-175a+20) \\
 &\quad \times (a-1)^7h^3 + a^2(a^9-5a^8+16a^7-28a^6+44a^5-106a^4+202a^3 \\
 &\quad - 200a^2+100a-15)(a-1)^8h^2 - a(12a^5-51a^4+90a^3-80a^2+36a \\
 &\quad - 6)(a-1)^9h - (a-1)^{16}, \\
 d_{24}(a, h) &:= -a^6h^6 + a^5(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2-6a+6)h^5 - a^4(a^6+6a^5-6a^3 \\
 &\quad + 17a^2-28a+16)(a-1)^2h^4 + a^3(a^7-a^6+9a^5+9a^4-37a^3+55a^2 \\
 &\quad - 56a+24)(a-1)^3h^3 - a^2(29a^4-68a^3+79a^2-60a+21)(a-1)^4h^2 \\
 &\quad - a(7a^4-26a^3+32a^2-24a+10)(a-1)^6h - (a^4-4a^3+6a^2-4a+2) \\
 &\quad \times (a-1)^8.
 \end{aligned}$$

Observem que amb la tècnica desenvolupada al present capítol hem obtingut condicions de periodicitat per a períodes més alts que els que apareixen al Capítol 2 o a la literatura [10, 48] o [92].

3.7 Aplicació de Lyness 2-periòdica

Considerem les aplicacions que resulten de la composició de dues *aplicacions de Lyness*, considerades a la Secció 3.6. Sigui doncs, $F_{b,a} = F_b \circ F_a$ on

$$F_{b,a}(x, y) := \left(\frac{a+y}{x}, \frac{a+bx+y}{xy} \right), \quad (3.7.1)$$

amb $a > 0$ i $b > 0$, les qual anomenem *aplicacions de Lyness 2-periòdiques* (vegeu el Capítol 2). Considerarem aquestes aplicacions definides a $\mathcal{Q}^+ := \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \in \mathbb{R}^2$. Cadascuna d'elles té com a integral primera

$$V_{b,a}(x, y) = \frac{(bx+a)(ay+b)(ab+ax+by)}{xy}, \quad (3.7.2)$$

la qual preserva una mesura absolutament contínua respecte de la mesura de Lebesgue amb densitat $\nu = 1/(xy)$.

L'existència de corbes de nivell de $V_{b,a}$ tancades està garantida (veure [28]), per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{Q}^+ : V_{b,a}(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació $F_{b,a}$ és conjugada a una rotació. Com a les seccions anteriors, analitzem els factors de les expressions (3.2.3) calculades amb l'ajut del programari esmentat fins on ens permet aquesta tecnologia, tot obtenint el següent resultat:

Teorema 3.7.1. *Les d-condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.7.2) i corresponents als continus de punts k-periòdics de les aplicacions de Lyness 2-periòdiques, per $k \leq 11$, vénen donades per $d_k(a, b, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} d_4(a, b, h) &:= h - BA, \\ d_5(a, b, h) &:= (ab - 1)h + BA, \\ d_6(a, b, h) &:= h^2 + (a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 + 3ab)h \\ &\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 2ab), \\ d_7(a, b, h) &:= -h^3 + (a^3b^3 - 4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h^2 \\ &\quad - BA(-4a^2b^2 + 3a^3 + 3b^3 - 3ab)h + B^3A^3, \\ d_8(a, b, h) &:= h^3 + (-2a^3 - 2b^3 + 5ab - 1)h^2 \\ &\quad + BA(-a^2b^2 + a^3 + b^3 - 4ab + 2)h - B^2A^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_9(a, b, h) &:= -h^5 + (-4a^2b^2 + 5a^3 + 5b^3 - 6ab)h^4 \\
 &\quad + (a^5b^5 - 10a^4b^4 + 17a^5b^2 + 17a^2b^5 - 10a^6 - 38a^3b^3 \\
 &\quad - 10b^6 + 24a^4b + 24ab^4 - 15a^2b^2)h^3 + BA(10a^4b^4 - 17a^5b^2 \\
 &\quad - 17a^2b^5 + 10a^6 + 37a^3b^3 + 10b^6 - 26a^4b - 26ab^4 + 19a^2b^2)h^2 \\
 &\quad - (4a^4b^4 - 9a^5b^2 - 9a^2b^5 + 5a^6 + 20a^3b^3 + 5b^6 - 14a^4b \\
 &\quad - 14ab^4 + 12a^2b^2)B^2A^2h + (a^4b^4 - 2a^5b^2 - 2a^2b^5 + a^6 \\
 &\quad + 5a^3b^3 + b^6 - 3a^4b - 3ab^4 + 3a^2b^2)B^3A^3, \\
 d_{10}(a, b, h) &:= (-ab - 1)h^5 + (-a^3b^3 + 4a^4b + 4ab^4 - 12a^2b^2 + 5a^3 + 5b^3 \\
 &\quad - 5ab)h^4 + (-a^5b^5 + 6a^6b^3 + 6a^3b^6 - 6a^7b - 35a^4b^4 - 6ab^7 \\
 &\quad + 41a^5b^2 + 41a^2b^5 - 10a^6 - 56a^3b^3 - 10b^6 + 20a^4b + 20ab^4 \\
 &\quad - 10a^2b^2)h^3 + BA(a^5b^5 - 5a^6b^3 - 5a^3b^6 + 4a^7b + 30a^4b^4 + 4ab^7 \\
 &\quad - 37a^5b^2 - 37a^2b^5 + 10a^6 + 55a^3b^3 + 10b^6 - 20a^4b - 20ab^4 \\
 &\quad + 10a^2b^2)h^2 - (a^5b^5 - 2a^6b^3 - 2a^3b^6 + a^7b + 12a^4b^4 + ab^7 \\
 &\quad - 15a^5b^2 - 15a^2b^5 + 5a^6 + 25a^3b^3 + 5b^6 - 10a^4b - 10ab^4 \\
 &\quad + 5a^2b^2)B^2A^2h + B^5A^5, \\
 d_{11}(a, b, h) &:= h^8 + (4b^2a^2 - 7a^3 - 7b^3 + 10ba)h^7 + (10a^4b^4 - 27a^5b^2 - 27a^2b^5 \\
 &\quad + 21a^6 + 78a^3b^3 + 21b^6 - 60ba^4 - 60b^4a + 45b^2a^2 - ba)h^6 \\
 &\quad + (-a^7b^7 + 20a^6b^6 - 57a^7b^4 - 57a^4b^7 + 75a^8b^2 + 213a^5b^5 + 75a^2b^8 \\
 &\quad - 35a^9 - 309a^6b^3 - 309a^3b^6 - 35b^9 + 150a^7b + 460a^4b^4 + 150ab^7 \\
 &\quad - 225a^5b^2 - 225a^2b^5 + 104a^3b^3 + 6ba^4 + 6b^4a - 6b^2a^2)h^5 \\
 &\quad + BA(-20a^6b^6 + 57a^7b^4 + 57a^4b^7 - 75a^8b^2 - 207a^5b^5 - 75a^2b^8 \\
 &\quad + 35a^9 + 321a^6b^3 + 321a^3b^6 + 35b^9 - 165a^7b - 534a^4b^4 - 165ab^7 \\
 &\quad + 285a^5b^2 + 285a^2b^5 - 140a^3b^3 - 15ba^4 - 15b^4a + 15b^2a^2)h^4 \\
 &\quad - (-10a^6b^6 + 37a^7b^4 + 37a^4b^7 - 48a^8b^2 - 139a^5b^5 - 48a^2b^8 + 21a^9 \\
 &\quad + 213a^6b^3 + 213a^3b^6 + 21b^9 - 108a^7b - 381a^4b^4 - 108ab^7 + 213a^5b^2 \\
 &\quad + 213a^2b^5 - 106a^3b^3 - 20ba^4 - 20b^4a + 20b^2a^2)B^2A^2h^3 + (-4a^6b^6 \\
 &\quad + 15a^7b^4 + 15a^4b^7 - 18a^8b^2 - 60a^5b^5 - 18a^2b^8 + 7a^9 + 84a^6b^3 \\
 &\quad + 84a^3b^6 + 7b^9 - 39a^7b - 154a^4b^4 - 39ab^7 + 87a^5b^2 + 87a^2b^5 \\
 &\quad - 40a^3b^3 - 15ba^4 - 15b^4a + 15b^2a^2)B^3A^3h^2 - (a^4b^4 - 2a^5b^2 \\
 &\quad - 2a^2b^5 + a^6 + 7a^3b^3 + b^6 - 5ba^4 - 5b^4a + 10b^2a^2 - 6ba)B^5A^5h \\
 &\quad - baB^6A^6.
 \end{aligned}$$

on prenem $A = a^2 - b$ i $B = a - b^2$ com a notació, per alleugerir les expressions.

Observem que les condicions de periodicitat calculades coincideixen amb les condicions trobades al Capítol 2 i que, per tant, realment caracteritzen els continus d'òrbites periòdiques.

Observem també que amb el mètode emprat en aquest capítol i treballant fins a esgotar els nostres recursos tecnològics, només hem pogut arribar a calcular l'expressió de $d_{11}(a, b)$. Al Capítol 2, usant una tècnica específica per aplicacions que preserven fibracions de gènere 1, vam poder caracteritzar els continus de punts periòdics fins al període 14, *sense exhaurir* els nostres recursos computacionals.

3.8 Aplicació de Lyness 3-periòdica

Considerem ara les aplicacions que resulten de la composició de tres *aplicacions de Lyness*, introduïdes a la Secció 3.6. Considerem doncs, $F_{c,b,a} = F_c \circ F_b \circ F_a$ on

$$F_{c,b,a}(x, y) := \left(\frac{a + bx + y}{xy}, \frac{a + bx + y + cxy}{y(a + y)} \right), \quad (3.8.1)$$

amb $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$, les qual anomenarem *aplicacions de Lyness 3-periòdiques* (veure [28]). Considerarem aquestes aplicacions $F_{c,b,a}$ definides a $\mathcal{Q}^+ := \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \in \mathbb{R}^2$. Les aplicacions tenen com a integral primera la funció

$$V_{c,b,a}(x, y) = \frac{cx^2y + axy^2 + bx^2 + by^2 + (a + bc)x + (c + ab)y + ac}{xy}, \quad (3.8.2)$$

i preserven una mesura absolutament contínua respecte de la mesura de Lebesgue amb densitat $\nu = 1/(xy)$.

L'existència de corbes de nivell de $V_{c,b,a}$ tancades està garantida (veure [28]), per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{Q}^+ : V_{c,b,a}(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació $F_{c,b,a}$ és conjugada a una rotació. Com a les seccions anteriors, analitzem els factors de les expressions (3.2.3) calculades amb l'ajut del programari esmentat fins on ens permet aquesta tecnologia, tot obtenint el següent resultat:

Teorema 3.8.1. *Les d-condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.8.2) i corresponents als continus de punts k-periòdics de les aplicacions de Lyness 3-periòdiques, per $k \leq 6$, vénen donades per $d_k(a, b, c, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} d_3(a, b, c, h) &:= h + a^2 + b^2 + c^2 - abc + 1, \\ d_4(a, b, c, h) &:= h^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 3)h + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - 2abc \\ &\quad + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2, \\ d_5(a, b, c, h) &:= (-abc + 1)h^3 + (-a^3bc - ab^3c - abc^3 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 - 6abc \\ &\quad + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3)h^2 + (-a^3b^3c - a^3bc^3 - ab^3c^3 - a^4b^2 - a^4c^2 - a^2b^4 \\ &\quad + 2a^2b^2c^2 - a^2c^4 - b^4c^2 - b^2c^4 - 8a^3bc - 8ab^3c - 8abc^3 + 3a^4 + 3a^2b^2 \\ &\quad + 3a^2c^2 + 3b^4 + 3b^2c^2 + 3c^4 - 8abc + 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 + 3)h - 4a^3b^3c \\ &\quad + 3a^2b^2c^2 - 3abc - 6a^3bc - 4a^3bc^3 - 4ab^3c^3 + b^6 + a^6 + 3a^4 + 3b^4 + 3c^4 \\ &\quad + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + c^6 - 6ab^3c - 6abc^3 - a^4c^4 - b^4c^4 - a^4b^4 - 3abc^5 \\ &\quad + a^4b^2c^2 - a^3b^3c^3 + a^2b^2c^4 - 3a^5bc + a^2b^4c^2 - 3ab^5c + 4a^2b^2 \\ &\quad + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + a^4b^2 + a^4c^2 + a^2b^4 + a^2c^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_6(a, b, c, h) := & -h^4 + (-abc - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 - 5)h^3 + (-a^3bc - ab^3c - abc^3 - a^4 \\
 & - 5a^2b^2 - 5a^2c^2 - b^4 - 5b^2c^2 - c^4 - 2abc - 7a^2 - 7b^2 - 7c^2 - 10)h^2 \\
 & + (-a^3b^3c - a^3bc^3 - ab^3c^3 - 3a^4b^2 - 3a^4c^2 - 3a^2b^4 - 4a^2b^2c^2 - 3a^2c^4 \\
 & - 3b^4c^2 - 3b^2c^4 - 4a^3bc - 4ab^3c - 4abc^3 - a^4 - 11a^2b^2 - 11a^2c^2 - b^4 \\
 & - 11b^2c^2 - c^4 + 4abc - 10a^2 - 10b^2 - 10c^2 - 9)h + c^6 + b^6 + a^6 - 8b^2c^2 \\
 & - 8a^2c^2 - 3b^4c^2 - 3b^2c^4 - 3a^2c^4 - 3a^4c^2 - 8a^2b^2 - 2b^4c^4 - 3a^2b^4 - 2a^4b^4 \\
 & - 3a^4b^2 - 2a^4c^4 + 5abc + 2ab^3c - 3abc^5 + 2abc^3 - 13a^2b^2c^2 - 3ab^5c \\
 & - a^2b^2c^4 - 3a^5bc + 2a^3bc - a^3b^3c^3 - a^4b^2c^2 - a^2b^4c^2 - 5a^2 - a^4 - b^4 - 5b^2 \\
 & - 5c^2 - c^4 - 3.
 \end{aligned}$$

3.9 Aplicació de Lyness 6-periòdica

Com a les seccions anteriors, considerem les aplicacions que resulten de la composició de sis *aplicacions de Lyness*, estudiades a la Secció 3.6, amb $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$ i $f > 0$ les qual anomenarem *aplicacions de Lyness 6-periòdiques*. Aquesta aplicació $F_{f,e,d,c,b,a} = F_f \circ F_e \circ F_d \circ F_c \circ F_b \circ F_a$ (veure [30]) està definida a $\mathcal{Q}^+ := \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \in \mathbb{R}^2$ i té com a integral primera

$$V_{f,e,d,c,b,a}(x, y) = \frac{af + (bf + a)x + (ae + f)y + bx^2 + ey^2 + cx^2y + dxy^2}{xy}, \quad (3.9.1)$$

la qual preserva una mesura absolutament contínua respecte de la mesura de Lebesgue amb densitat $\nu = 1/(xy)$, per tant, pel Teorema 3.3.2, sobre aquelles corbes de nivell $C_h := \{(x, y) \in \mathcal{Q}^+ : V_{f,e,d,c,b,a}(x, y) = h\}$ tals que $C_h \cong \mathbb{S}^1$, l'aplicació $F_{f,e,d,c,b,a}$ és conjugada a una rotació.

Com a les seccions anteriors, analitzem els factors de les expressions (3.2.3) calculades amb l'ajut del programari Maple. Observem però que només hem pogut obtenir la d -condició associada a la integral primera (3.9.1) corresponent als continus de punts 2-periòdics. Aquesta condició ve donada per

$$\begin{aligned}
 d_2(a, b, c, d, e, f, h) := & h^2 + (ad + be + cf + 3)h + abde + acdf + bcef - cae \\
 & - bdf + 2ad + 2be + 2cf + 2.
 \end{aligned}$$

En aquest cas, el càlcul efectiu es redueix a una sola condició degut a la incapacitat del programa per assignar un bloc gran de memòria en el nostre equip.

3.10 Aplicació de Bastien-Rogalski

Considerem la família uniparamètrica d'aplicacions introduïda per G. Bastien i M. Rogalski a [11], i estudiada amb detall al Capítol 1:

$$F_a(x, y) = \left(y, \frac{a - y + y^2}{x} \right), \quad (3.10.1)$$

definida a $\mathbb{R}^{2,+}$ i amb valors del paràmetre $a > 1/4$. Cadascuna de les aplicacions F_a té com a integral primera

$$V_a(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x - y + a}{xy}. \quad (3.10.2)$$

Recordem que per $2 - 1/a < h < 2$, les corbes de nivell $\{V_a(x, y) = h\}$ són el·lipses, i que cada aplicació $F_a|_{C_h}$ és conjugada a una rotació amb nombre de rotació explícit,

$$\theta(h) = \arg \left(\frac{h - i\sqrt{4 - h^2}}{2} \right) \mod 2\pi. \quad (3.10.3)$$

Teorema 3.10.1. *Les d-condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.10.2) i corresponents als continus de punts k -periòdics de les aplicacions de Bastien i Rogalski, per $k \leq 15$ vénen donades per $d_k(a, h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} d_3(a, h) &:= h + 1, \\ d_4(a, h) &:= h, \\ d_5(a, h) &:= h^2 + h - 1, \\ d_6(a, h) &:= h - 1, \\ d_7(a, h) &:= h^3 + h^2 - 2h - 1, \\ d_8(a, h) &:= h^2 - 2h, \\ d_9(a, h) &:= h^3 - 3h + 1, \\ d_{10}(a, h) &:= h^2 - h - 1, \\ d_{11}(a, h) &:= h^5 + h^4 - 4h^3 - 3h^2 + 3h + 1, \\ d_{12}(a, h) &:= h^2 - 3, \\ d_{13}(a, h) &:= h^6 + h^5 - 5h^4 - 4h^3 + 6h^2 + 3h - 1, \\ d_{14}(a, h) &:= h^3 - h^2 - 2h + 1, \\ d_{15}(a, h) &:= h^4 - h^3 - 4h^2 + 4h + 1. \end{aligned}$$

Observació 3.10.2. Fixem-nos que a la Proposició 1.4.3 del Capítol 1 hem obtingut els mateixos resultats, tot fent ús de la funció nombre de rotació (3.10.3).

3.11 Aplicació de Saito i Saitoh

Considerem l'aplicació introduïda per S. Saito i N. Saitoh a [82]

$$F(x, y) = \left(xy, \frac{y(1+x)}{1+xy} \right), \quad (3.11.1)$$

definida a un conjunt obert de \mathbb{C}^2 i estudiada al Capítol 1. Aquesta aplicació té com a integral primera

$$V(x, y) = y(1 + x), \quad (3.11.2)$$

vegeu novament [82].

Com a les seccions anteriors, analitzem els factors de les expressions (3.2.3) calculades amb l'ajut del programari esmentat, tot obtenint el següent resultat:

Teorema 3.11.1. *Les d -condicions de periodicitat associades a la integral primera (3.11.2) i corresponents als continus de punts k -periòdics de les aplicacions de Saito i Saitoh, per $k \leq 15$, vénen donades per $d_k(h) = 0$, on:*

$$\begin{aligned} d_2(h) &:= h + 1, \\ d_3(h) &:= h^2 + h + 1, \\ d_4(h) &:= h^2 + 1, \\ d_5(h) &:= h^4 + h^3 + h^2 + h + 1, \\ d_6(h) &:= h^2 - h + 1, \\ d_7(h) &:= h^6 + h^5 + h^4 + h^3 + h^2 + h + 1, \\ d_8(h) &:= h^4 + 1, \\ d_9(h) &:= h^6 + h^3 + 1, \\ d_{10}(h) &:= h^4 - h^3 + h^2 - h + 1, \\ d_{11}(h) &:= h^{10} + h^9 + h^8 + h^7 + h^6 + h^5 + h^4 + h^3 + h^2 + h + 1, \\ d_{12}(h) &:= h^4 - h^2 + 1, \\ d_{13}(h) &:= h^{12} + h^{11} + h^{10} + h^9 + h^8 + h^7 + h^6 + h^5 + h^4 + h^3 + h^2 + h + 1, \\ d_{14}(h) &:= h^6 - h^5 + h^4 - h^3 + h^2 - h + 1, \\ d_{15}(h) &:= h^8 - h^7 + h^5 - h^4 + h^3 - h + 1. \end{aligned}$$

Observació 3.11.2. En aquest cas, el programari calcula molt ràpidament les condicions $d_k(h)$ per a períodes molt més alts (per exemple, hem obtingut en segons les condicions per $k \leq 50$), tot i que per exemplificar el teorema només se n'han detallat aquestes quinze.

Recordem també, que a la Proposició 1.5.1, apartat (b) (ii) del Capítol 1 demostràvem que els continus de punts amb període mínim k estan sobre els nivells d'energia h_k , on h_k és una arrel primitiva k -èsima de la unitat. Observem que les expressions de les condicions $d_k(h)$ són polinomis ciclotòmics, és a dir, aquells polinomis irreductibles tals que les seves arrels són arrels de la unitat.

Capítol 4

Sistemes dinàmics associats a transformacions de Landen

4.1 Introducció

Des del segle XVII, en que Leibniz i Newton van introduir el càlcul diferencial i integral, aquesta eina ha estat una de las bases de la ciència i la tecnologia. Ara bé, així com el càlcul de derivades és una “feina” rutinària, el càlcul d’integrals, ja siguin definides o indefinides és un “art”. Tots recordem els enginyosos canvis de variable per a calcular certes primitives, o el plaer de que el mètode d’integració per parts quadri després d’aplicar-lo un cert número de vegades. A part d’aquestes tècniques ben establertes, i que serveixen tant per a calcular primitives com per a calcular integrals definides, n’hi ha d’altres que serveixen només per a calcular integrals definides. Un d’aquests mètodes consisteix en l’aplicació de les anomenades *transformacions de Landen*. Com veurem, aquestes transformacions associen a una certa família d’integrals que depenen de paràmetres un sistema dinàmic discret, de manera que les integrals buscades són integrals primeres del sistema dinàmic discret. Usant aquesta propietat, sovint les integrals es poden calcular o aproximar estudiant els comportaments límit del sistema dinàmic discret.

En lloc de donar totes les definicions en general, donem l’exemple paradigmàtic del mètode, que com veurem és el que li ha donat nom.

Considerem, per $a > 0$, $b > 0$, la integral el·líptica

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4.1.1)$$

Com veurem a la Secció 4.2, es compleix que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}}. \quad (4.1.2)$$

En altres paraules, si considerem la funció

$$F(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right), \quad (4.1.3)$$

aleshores tenim que $I(a, b) = I(F(a, b))$. És a dir que I és una integral primera del sistema dinàmic discret generat per l'aplicació* F . Això ens diu que tots els punt d'una òrbita de F , $\mathcal{O}_{(a_0, b_0)} := \{F^n(a_0, b_0) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ estan dins de la mateixa corba de nivell d' I , $I(a, b) = I(a_0, b_0)$ i també hi són els seus punts d'acumulació. Aquests darrers punts formen el que s'anomena conjunt ω -límit de l'òrbita. Aquí $F^n = (F_1^n, F_2^n)$ denota la composició de $F = (F_1, F_2)$ amb si mateixa n cops, on $F^0 = \text{Id}$.

Gauss va provar l'any 1799 la igualtat (4.1.2), però un resultat més general que aquest ja havia estat demostrat per Landen, l'any 1775, veure [3, 36, 50, 60]. John Landen (1719-1790) va ser un matemàtic anglès aficionat que va treballar com a topògraf i com a agent immobiliari, vegeu més detalls de la seva obra a [3, 81]. De fet, les relacions entre funcions el·líptiques trobades per ell són conegudes com a *transformacions de Landen*. Sense entrar en cap formalisme i parlant més en general, avui en dia una transformació de Landen és una relació entre dues integrals definides de funcions del “mateix tipus” depenents de paràmetres. En les integrals, tant els paràmetres, com els límits d'integració no tenen per que ser els mateixos, però aquests valors satisfan relacions funcionals entre ells (vegeu de nou [3, 81] per a més detalls).

Hom podria pensar però, de què ens serveix fer un canvi en la integral, si ens la deixa exactament igual i, aparentment no ens ajuda per tal de trobar el seu valor? Doncs bé, el canvi sí que és interessant, donat que si està ben escollit, després d'aplicar-lo reiteradament ens permetrà de calcular la integral de manera aproximada, fent només un pas al límit sota el signe de la integral. Concretament, a la Secció 4.2 veurem que:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{MAG(a, b)}, \quad (4.1.4)$$

on $MAG(a, b)$ denota la mitjana aritmètico-geomètrica dels nombres a i b . Els detalls d'aquest resultat estan desenvolupats al Teorema 4.2.1.

A la Secció 4.2, també aplicarem la invariància de la integral $I(a, b)$ per l'aplicació F i la relació (4.1.4), per a calcular la longitud de la lemniscata (Secció 4.2.3) i presentar l'algorisme de Brent-Salamin per al càlcul del nombre π (Secció 4.2.4).

Seguint el mateix esperit que als apartats precedents, a la Secció 4.3 obtindrem altres transformacions de Landen donades per algunes mitjanes generalitzades.

Canviant una mica el tipus de funcions que volem integrar, a la Secció 4.4, seguint [16, 17, 23, 64, 70], estudiarem diverses transformacions de Landen que ens permetran calcular certes integrals definides impròpies donades per quocients de polinomis. Com

*Si l'aplicació F no és invertible, hauríem de parlar més pròpiament de semi-sistemes dinàmics discrets, però com es fa sovint, ometrem el prefixe “semi”.

a exemple senzill, i que també pot ser calculat sense massa dificultat usant els mètodes tradicionals, en aquesta introducció donem el resultat que ens permet calcular per aquest procediment la integral

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx, \quad a > -2.$$

Considerem

$$F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}, \frac{b+c}{\sqrt{a+2}}\right).$$

A la Secció 4.4.1 (Teorema 4.4.1), provem que

$$I(a, b, c) = I(F(a, b, c)).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I(a, b, c) &= I(F(a, b, c)) = \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{(b+c)\pi}{2\sqrt{a+2}}. \end{aligned}$$

Observem que en aquest cas no ha calgut fer el pas al límit per a fer el càlcul, atès que tot els punts (a, b, c) son pre-fixos (la seva imatge és un punt fix) pel sistema dinàmic discret generat per F . Un altre exemple racional senzill s'estudia a [63].

Quan considerem la integral més complicada

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

també es pot construir una transformació de Landen associada, vegeu la Secció 4.4. Si prenem l'aplicació amb estructura triangular, $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$, on

$$G(a, b) = \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a+b+2)^4}}, \frac{a+b+6}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}} \right), \quad (4.1.5)$$

$$H(a, b, c, d, e) = \left(\frac{c+d+e}{\sqrt[3]{(a+b+2)^2}}, \frac{(b+3)c + (a+3)e + 2d}{a+b+2}, \frac{c+e}{\sqrt[3]{a+b+2}} \right), \quad (4.1.6)$$

aleshores $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$ (vegeu el Teorema 4.4.2). Aquest fet és conegut i es pot trobar a [16] i [17].

Finalment, al Teorema 4.4.3 obtenim la transformació de Landen per a la integral

$$I(a, b, c, d, e, f, g) := \int_0^\infty \frac{dx^8 + ex^4 + fx^2 + g}{x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1} dx,$$

que també es dona a [16] i [17].

4.2 La transformació de Gauss-Landen, la mitjana aritmètico-geomètrica i l'algorisme de Brent-Salamin

En aquesta Secció demostrarem el següent resultat:

Teorema 4.2.1. *Per $a > 0$, $b > 0$ definim:*

$$I(a, b) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Si considerem l'aplicació

$$F(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right),$$

aleshores I és una integral primera del sistema dinàmic discret generat per F , és a dir $I(F(a, b)) = I(a, b)$. A més,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{MAG(a, b)}. \quad (4.2.1)$$

Demostrarem aquest resultat a la Secció 4.2.2. Prèviament farem algunes consideracions sobre la mitjana aritmètico-geomètrica i, com a aplicació, usarem la fórmula (4.2.1) per al càlcul de la longitud de la Lemniscata (Secció 4.2.3). Finalment, a la Secció 4.2.4, veurem com el sistema dinàmic definit per l'aplicació (4.1.3) apareix a l'algorisme de Brent-Salamin per al càlcul del nombre π .

4.2.1 La mitjana aritmètico-geomètrica

En aquest apartat enunciaré algunes generalitats sobre la mitjana aritmètico-geomètrica, els quals estan extrets de [18]. La mitjana aritmètico-geomètrica de dos nombres positius a i b es defineix com el límit comú de les successions $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ determinat per l'algorisme següent:

$$\begin{aligned} a_0 &= a, & b_0 &= b, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, \quad \text{per tot } n \geq 0. \end{aligned}$$

Notem que a_1 i b_1 són respectivament les mitjanes aritmètico i geomètrica de a i b , a_2 i b_2 les corresponents a a_1 i b_1 , i així successivament. D'aquí li ve el nom al límit comú de les dues successions, al qual anomenarem

$$MAG(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Aquest procés va aparèixer primer en un document de Lagrange, però va ser Gauss qui hi va aprofundir. Lamentablement però, aquest últim en va publicar molt poca cosa.

A continuació, veurem un seguit de resultats preliminars sobre la $MAG(a, b)$. No és restrictiu suposar que $a \geq b$, ja que $MAG(a, b) = MAG(b, a)$, i així ho farem quan ens calgui.

La desigualtat entre la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica, de tots prou coneguda

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

implica immediatament que $a_n \geq b_n$ per tot $n \geq 0$ i, d'aquesta darrera també obtenim que:

$$a_n \geq \frac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1} \geq b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq b_n.$$

Disposem doncs, d'una successió $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ decreixent i afitada inferiorment per b i, d'una successió $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ creixent i afitada superiorment per a ,

$$a = a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq b_n \geq \dots \geq b_1 \geq b_0 = b.$$

Per tant, ambdues tenen límit, anomenem-los

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

ara bé, al prendre límits a ambdós costats de la definició de la mitjana aritmètica

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

tenim que

$$A = \frac{A+B}{2} \Rightarrow 2A = A+B \Rightarrow A = B := MAG(a, b),$$

per tant, queda demostrada doncs, la igualtat dels límits de les successions.

Exemple 4.2.2. Com a il·lustració, vegem per exemple que

$$MAG(\sqrt{2}, 1) \simeq 1.198140234735592207441.$$

En efecte, usant l'expressió de les successions a_n i b_n , obtenim:

n	a_n	b_n
0	1.414213562373095048802	1
1	1.207106781186547524401	1.189207115002721066718
2	1.198156948094634295560	1.198123521493120122607
3	1.198140234793877209084	1.198140234677307205799
4	1.198140234735592207442	1.198140234735592207440
5	1.198140234735592207441	1.198140234735592207441

Observació 4.2.3. Notem també algunes de les igualtats que verifica la MAG i que són molt fàcils de demostrar:

- $MAG(a, b) = MAG(a_1, b_1) = MAG(a_2, b_2) = \dots = MAG(a_n, b_n) = \dots$
- $MAG(ca, cb) = cMAG(a, b)$, per tot $c > 0$.
- $MAG(a, a) = a$.

Vegem ara que la convergència de les successions a_n i b_n és quadràtica. Per fer-ho, usarem la igualtat resultant de les manipulacions següents:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} = \frac{((\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}))^2}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}, \end{aligned}$$

i la successió auxiliar $c_{n+1} = (a_n - b_n)/2$, la qual verifica (usant el resultat anterior) que:

$$\begin{aligned} 2c_{n+2} &= a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2} \frac{4c_{n+1}^2}{(a_n + b_n + 2\sqrt{a_n b_n})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{4c_{n+1}^2}{(2a_{n+1} + 2b_{n+1})} = \frac{c_{n+1}^2}{a_{n+1} + b_{n+1}} \leq \frac{c_{n+1}^2}{2b}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$c_{n+2} \leq \frac{c_{n+1}^2}{4b} \Rightarrow |c_{n+2}| \leq \frac{1}{4b} |c_{n+1}|^2$$

tal i com volíem veure.

4.2.2 La demostració de Gauss

Demostració del Teorema 4.2.1 (Prova de Gauss). L'any 1816, Gauss va donar la primera demostració del teorema que ens ocupa, tot usant únicament el canvi de variables següent [77]:

$$\sin \theta = \frac{2a \sin \varphi}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi},$$

on $\theta \in (0, \pi/2)$, per tant $0 \leq \sin \theta \leq 1$ i, també $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Notem que aquest canvi de variables ve induït pel fet que la funció:

$$f(x) = \frac{2ax}{(a+b) + (a-b)x^2}$$

és creixent a $[0, 1]$, amb $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$.

Usant doncs el canvi anteriorment esmentat, obtenim:

$$\cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi) \cos \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2}.$$

Per altra banda:

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta &= a^2(1 - \sin^2 \theta) + b^2 \sin^2 \theta = a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 \theta \\ &= a^2 + (b^2 - a^2) \frac{4a^2 \sin^2 \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2} \\ &= \frac{a^2(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi)^2}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{a+b+(a-b)\sin^2 \varphi}{a(a+b-(a-b)\sin^2 \varphi)} \cdot \frac{2a \cos \varphi (a+b-(a-b)\sin^2 \varphi)}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 \cos \theta} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi) \cos \theta}. \end{aligned}$$

Un petit càlcul mostra que:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{4a^2 \sin^2 \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2} = \frac{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2},$$

i per tant:

$$I(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Novament, un altre càlcul mostra que:

$$(a+b+(a-b)\sin^2 \varphi)^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi ((b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab).$$

Així doncs, donat que $\cos \varphi > 0$ a $(0, \pi/2)$, arribem a:

$$I(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi ((b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab)}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab}}.$$

Fent servir, ara, que

$$\begin{aligned}(b-a)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \Rightarrow (b-a)^2 \cos^2 \varphi + 4ab = ((a+b)^2 - 4ab) \cos^2 \varphi + 4ab \\ &= (a+b)^2 \cos^2 \varphi + 4ab(1 - \cos^2 \varphi) = (a+b)^2 \cos^2 \varphi + 4ab \sin^2 \varphi \\ &= 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + 4 (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi = 4 \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi \right),\end{aligned}$$

obtenim finalment:

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \cos^2 \varphi + (\sqrt{ab})^2 \sin^2 \varphi \right)}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right),$$

amb el que queda demostrada la invariància de la integral.

Comprovem ara la igualtat (4.2.1) fent ús de la primera part d'aquest teorema i de la convergència de la mitjana aritmètico-geomètrica de dos nombres demostrada a la Secció 4.2.1.

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = I(a_n, b_n),$$

per a tot $n \geq 0$. Prenent límits a ambdós costats, quan $n \rightarrow \infty$ obtenim:

$$\begin{aligned}I(a, b) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{MAG(a, b)^2 \cos^2 \theta + MAG(a, b)^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{MAG(a, b)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{MAG(a, b)} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

Notem que la igualtat $I(a, b)MAG(a, b) = \pi/2$ ens permet de calcular la integral el·líptica a partir de la mitjana aritmètico-geomètrica, o a l'inrevés.

Per completar la secció, afegim una nova prova de la igualtat (4.2.1), deguda a Newman, la més curta que coneixem, que ens mostra que l'ús dels canvis de variable és tot un art.

Prova de Newman ([73]). Usant el canvi de variables $u = \tan(\theta)$ obtenim

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}.$$

A continuació, apliquem el segon canvi de variables, $v = \frac{u}{2} - \frac{ab}{2u}$. És fàcil comprovar que és bijectiu i que transforma la integral anterior en

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + v^2\right)(ab + v^2)}}.$$

Finalment usem el tercer canvi $v = \sqrt{ab} \tan \theta$, amb el qual arribem de nou a

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cos^2 \theta + ab \sin^2 \theta}} = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

■

4.2.3 La longitud de la lemniscata

Seguint [18, 36] i com a aplicació del Teorema 4.2.1, es pot relacionar la longitud \mathcal{L} de la lemniscata que en coordenades polars s'escriu com $r^2 = \cos(2\theta)$, amb la integral definida

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}},$$

i amb una mitjana aritmètico-geomètrica. De fet, aquesta integral ja apareix l'any 1691 en documents de Jacob Bernoulli i era força coneguda al segle XVIII. Va ser Gauss qui la va denotar per ϖ . Com veurem tot seguit, fent dos canvis de variable diferents per al càlcul de \mathcal{L} arribem a que $\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1)$. Com que ja hem vist que $2I(\sqrt{2}, 1) = \pi / \text{MAG}(\sqrt{2}, 1)$, obtenim que,

$$\text{MAG}(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\varpi}.$$

Gauss va conjecturar aquesta relació abans de provar-la, basant-se en càlculs numèrics, tal i com va afirmar en la nota 98 (30 de maig de 1799) en el seu diari [49], on hi va escriure: *“He demostrat fins a l'onzena xifra decimal, que el límit de la mitjana aritmètico-geomètrica entre els nombres $\sqrt{2}$ i 1 és igual a π/ϖ ; aquesta demostració obrirà segurament una àrea totalment nova en l'anàlisi”*. Com no podia ser d'altra manera, Gauss la va encertar. Es referia a la Teoria de les funcions el·líptiques.

Així doncs, demostrarem:

Proposició 4.2.4. *Sigui \mathcal{L} la longitud de la lemniscata amb equació polar $r^2 = \cos(2\theta)$ i cartesiana $(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0$. Aleshores, es compleix que*

$$\mathcal{L} = 2\varpi = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}. \quad (4.2.2)$$

Demostració. És ben conegut que la longitud d'una corba $\rho = R(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, en coordenades polars ve donada per

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{R^2(\theta) + (R'(\theta))^2} d\theta.$$

En el nostre cas, usant la doble simetria de la lemniscata, tenim

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

Usant el canvi de variable $\cos(2\theta) = \cos^2 \phi$, l'anterior integral es transforma en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi}{\sin(2\theta)} d\phi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^4 \phi}} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} = 4I(\sqrt{2}, 1) = \frac{2\pi}{\text{MAG}(\sqrt{2}, 1)}. \end{aligned}$$

Observem que en el darrer pas s'ha usat la igualtat (4.2.1).

Per a provar la primera igualtat de (4.2.2) apliquem el canvi de variable $z = \cos \phi$ a la penúltima expressió integral de \mathcal{L} ,

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \cos^2 \phi}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2} \sqrt{1 - z^2}} = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} = 2\varpi,$$

i demostrem així la proposició. ■

4.2.4 L'algorisme de Brent-Salamin

Com a aplicació distingida d'aquesta transformació de Gauss-Landen, deduirem *l'algorisme de Brent-Salamin* (veure [6, 18, 42]), que serveix per a calcular π amb gran velocitat i que va ser introduït el 1973 de manera independent per Eugène Salamin i Richard Brent. Aquest algorisme es basa en la construcció d'una successió $\{z_n\}_n$ que convergeix quadràticament cap a π , definida com

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

on a_j i b_j venen definits per la transformació (4.1.3), es a dir $(a_{j+1}, b_{j+1}) = F(a_j, b_j) = ((a_j + b_j)/2, \sqrt{a_j b_j})$, amb $a_0 = 1$ i $b_0 = 1/\sqrt{2}$. Vegem els primers iterats de l'algorisme,

n	a_n	b_n
0	1	0.707106781186547524400...
1	0.85355339059327376220...	0.84089641525371454303...
2	0.84722490292349415261...	0.84720126674689146040...
3	0.84721308483519280650...	0.84721308475276536670...
4	0.84721308479397908660...	0.84721308479397908660...

i també,

n	z_n	$ z_n - \pi $
1	3.1405792505221682483113312689758233117734402375122...	2×10^{-3}
2	3.1415926462135422821493444319826957743144372233448...	8×10^{-9}
3	3.1415926535897932382795127748018639743812255048349...	2×10^{-19}
4	3.1415926535897932384626433832795028841971146782804...	6×10^{-41}

En aquesta darrera taula es pot apreciar clarament la convergència quadràtica del mètode. La demostració de la convergència està basada en la *teoria de les integrals el·líptiques*. Per a entendre d'on surt aquest mètode necessitarem doncs uns quants resultats previs sobre aquest tema.

Algunes propietats de les funcions el·líptiques

Començarem fent una breu introducció a la teoria de les funcions el·líptiques, recordant les notacions i propietats que necessitem per deduir l'algorisme de Brent-Salamin. El lector pot trobar aquesta informació a [2, 18, 19, 65].

En general, s'anomena *integral el·líptica* a una integral de la forma $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ on $R(x, y)$ és una funció racional en x i en y i, $P(x)$ és un polinomi de grau 3 o 4 sense arrels múltiples. En el cas particular que hi hagi límits d'integració, aleshores parlarem d'una *integral el·líptica completa*.

Tot i que primerament varen ser considerades per Fragnano, Euler, Lagrange i Landen, aquestes van ser tractades sistemàticament per Legendre, el qual va demostrar que qualsevol integral el·líptica pot relacionar-se amb tres integrals fonamentals. Aquestes tres integrals s'anomenen *integrals el·líptiques canòniques de Legendre* de primera, segona i tercera espècie. Les formes normals de Legendre no són les úniques possibles, però s'han mostrat molt útils i són les més comunament utilitzades.

Nosaltres usarem només les integrals el·líptiques completes de primera i segona

espècie $K(k)$ i $E(k)$, respectivament. Aquestes són,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2} dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

on $0 < k < 1$. Per exemple, la segona integral apareix en el càlcul de la longitud \mathcal{L} d'una el·lipse amb semieixos a i b . De fet,

$$\mathcal{L} = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = 4aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right),$$

i d'aquí el nom d'aquestes integrals. També apareixen en l'expressió del període d'un pèndol en funció de l'energia (vegeu aquest exemple i d'altres a [65]).

Les *integrals complementàries*[†] E' i K' són les integrals E i K avaluades en la variable complementària $k' = \sqrt{1 - k^2}$. De fet, k s'anomena *mòdul* i k' *mòdul complementari*. És a dir,

$$K'(k) = K(\sqrt{1 - k^2}) = K(k') \quad \text{i} \quad E'(k) = E(\sqrt{1 - k^2}) = E(k'). \quad (4.2.3)$$

Cal dir també, que es compleix la *relació de Legendre*, veure per exemple [18, pàg.24]:

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \pi/2. \quad (4.2.4)$$

De fet, com veurem, l'aparició de π en la igualtat de Legendre és el fet clau que permetrà construir l'algorisme.

Les funcions E i K estan també molt lligades amb la integral que apareix a (4.1.2) i amb una variació d'aquesta que tindrà també un paper important en el que segueix. No és difícil veure que per $a > b > 0$,

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{1}{a} K'\left(\frac{b}{a}\right), \quad (4.2.5)$$

$$J(a, b) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = aE'\left(\frac{b}{a}\right). \quad (4.2.6)$$

Abans de continuar provarem dos lemes tècnics. El primer d'ells estén la igualtat (4.1.2) a la funció $J(a, b)$. Recordem que $(a_{n+1}, b_{n+1}) = F(a_n, b_n)$ són les successions que defineixen la MAG(a, b).

[†]No confondre amb les derivades respecte a k d' E i K .

Lema 4.2.5. ([18, pàg.13]) Les integrals $I(a, b)$ i $J(a, b)$ compleixen

- (i) $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$,
- (ii) $2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n) = a_n b_n I(a_n, b_n)$.

Demostració. (i) La primera part és equivalent a (4.1.2).

(ii) Considerem $k_n := c_n/b_n$ on $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$. Aleshores $k'_n = \sqrt{1 - k_n^2} = b_n/a_n$. Per tant, fent ús de les relacions obtingudes en (4.2.3), (4.2.5) i (4.2.6), obtenim

$$2J(a_{n+1}, b_{n+1}) = 2a_{n+1}E\left(\sqrt{1 - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2}}\right) = 2a_{n+1}E\left(\frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = 2a_{n+1}E(k_{n+1}),$$

$$J(a_n, b_n) = a_nE\left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}}\right) = a_nE\left(\frac{c_n}{a_n}\right) = a_nE(k_n), \quad (4.2.7)$$

$$a_n b_n I(a_n, b_n) = b_n K\left(\sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}}\right) = b_n K\left(\frac{c_n}{a_n}\right) = b_n K(k_n). \quad (4.2.8)$$

Per tant la igualtat que volem demostrar és equivalent a

$$2a_{n+1}E(k_{n+1}) - a_nE(k_n) = b_nK_n. \quad (4.2.9)$$

Usant la igualtat (vegeu [18, Teorema 1.2(d)]):

$$E(k_n) = E\left(\frac{1 - k'_n}{1 + k'_n}\right) (1 + k'_n) - k'_n K(k_n)$$

i, tenint en compte que

$$k_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{a_n b_n}\right)^2}}{\frac{a_n + b_n}{2}} = \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \frac{1 - k'_n}{1 + k'_n},$$

obtenim

$$E(k_{n+1}) = \frac{E(k_n) + k'_n K(k_n)}{1 + k'_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n E(k_n) + b_n K(k_n)}{2a_{n+1}},$$

que és precisament (4.2.9). ■

Lema 4.2.6. ([18, pàg.15]) Considerem $a_0 = 1$, $b_0 = k' \in (0, 1]$, $\{(a_n, b_n)\}_n$ la successió generada per calcular la $\text{MAG}(1, k')$ i $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$. Aleshores

$$(i) \quad K(k) = \frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, k')}.$$

$$(ii) \quad E(k) = (1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2) K(k).$$

Demostració. (i) Usant (4.2.1) i (4.2.5) tenim

$$\frac{1}{a} K \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) = I(a, b) = \frac{1}{\text{MAG}(a, b)} \frac{\pi}{2}.$$

Prenent $b = k' = \sqrt{1 - k^2}$ i $a = 1$ obtenim el resultat desitjat.

(ii) Si introduïm la notació $J_{n+1} = J(a_{n+1}, b_{n+1})$, $I_n = I(a_n, b_n)$, sabem pel Lema 4.2.5 que

$$2J_{n+1} - J_n = a_n b_n I_n = a_n b_n I_0.$$

Com que $4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_n b_n = b_n^2 - a_n^2 = -c_n^2$, l'expressió anterior és pot escriure com

$$4J_{n+1} - 2J_n = 2a_n b_n I_0 = (4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 + c_n^2) I_0.$$

Si multipliquem l'expressió obtinguda per 2^{n-1} , obtenim $2^{n+1} J_{n+1} - 2^n J_n = 2^{n+1} a_{n+1}^2 I_0 - 2^n a_n^2 I_0 + 2^{n-1} c_n^2 I_0$, o equivalentment,

$$2^{n+1} (J_{n+1} - a_{n+1}^2 I_0) - 2^n (J_n - a_n^2 I_0) = 2^{n-1} c_n^2 I_0.$$

Considerant ara la successió auxiliar $w_n = 2^n (J_n - a_n^2 I_0)$, l'expressió obtinguda es pot escriure com $w_{n+1} - w_n = 2^{n-1} c_n^2 I_0$, i sumant a ambdós costats,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - w_n) = -w_0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n. \quad (4.2.10)$$

En aquest punt, afirmem que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$. Veiem que suposant certa aquesta afirmació, ja hem acabat la prova. Efectivament, ja que aleshores $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I_0 = -w_0 = -J_0 + a_0^2 I_0 = -J_0 + I_0$ i per tant

$$J_0 = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I_0,$$

d'on obtenim la igualtat que volíem provar, ja que usant (4.2.7), (4.2.8) i que $a_0 = 1$, i $k_0 = k$, sabem que $J_0 = E(k)$ i $I_0 = K(k)$.

Anem doncs a provar l'afirmació anterior. Tenim que

$$\begin{aligned} w_n &= 2^n (J_n - a_n^2 I_0) = 2^n (J_n - a_n^2 I_n) \\ &= 2^n \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} d\theta - a_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} \right) \\ &= 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{-c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Així doncs

$$|w_n| = 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{c_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta = 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta.$$

D'on tenim

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = 2^n c_n^2 I_n = 2^n c_n^2 I_0. \quad (4.2.11)$$

Ara bé com

$$4a_n c_n = 4 \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right) \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \right) = a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2 = c_{n-1}^2,$$

veiem finalment que per n prou gran

$$c_n = \frac{c_{n-1}^2}{4a_n} = \frac{c_{n-1}}{2} \frac{c_{n-1}}{2a_n} \leq \frac{c_{n-1}}{2}. \quad (4.2.12)$$

Per això és suficient demostrar que per n prou gran, $c_{n-1}/(2a_n) \leq 1$, o equivalentment, usant de nou que $c_{n-1} = (a_{n-1} - b_{n-1})/2$, que $a_{n-1} - b_{n-1} \leq 4a_n$. Ara bé, aquesta desigualtat és clarament certa, ja que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{MAG}(a_0, b_0) \neq 0$. Per tant, usant (4.2.11) i (4.2.12) arribem a

$$0 \leq |w_n| \leq 2^n c_n^2 I_0 \leq \frac{c_0^2 I_0}{2^n},$$

i així $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, tal i com volíem demostrar. Observem que (4.2.12) dóna una nova prova de la convergència quadràtica del càlcul de la mitjana aritmètico-geomètrica. ■

Algorisme de Brent-Salamin

Teorema 4.2.7. (Algorisme de Brent-Salamin [18, pàg.48]) *Considerem la successió $\{(a_n, b_n)\}_n$ definida per la transformació (4.1.3) per a calcular $\text{MAG}(a_0, b_0)$ amb $a_0 = 1$ i $b_0 = 1/\sqrt{2}$. Aleshores*

$$\pi = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} (a_j^2 - b_j^2)}.$$

A més, si definim la successió

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

es compleix que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \pi$.

Demostració. Observem que quan $k = 1/\sqrt{2}$, $k' = k$. Aleshores $K'(1/\sqrt{2}) = K(1/\sqrt{2})$, $E'(1/\sqrt{2}) = E(1/\sqrt{2})$ i la igualtat de Legendre (4.2.4) ens diu que

$$2E(1/\sqrt{2})K(1/\sqrt{2}) - K^2(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.2.13)$$

Altrament, per l'apartat (ii) del Lema 4.2.6, i recordant que $c_j^2 = a_j^2 - b_j^2$, tenim

$$E(1/\sqrt{2}) = \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) K(1/\sqrt{2}).$$

Per tant, substituint aquest resultat a l'expressió (4.2.13):

$$K^2(1/\sqrt{2}) \left(2 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2) - 1\right) = K^2(1/\sqrt{2}) \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (4.2.14)$$

Usant l'apartat (i) del Lema 4.2.6, tenim

$$\left(\frac{\pi}{2 \text{MAG}(1, 1/\sqrt{2})}\right)^2 \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) = \frac{\pi}{2},$$

i per tant,

$$\left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)\right) \frac{\pi}{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})} = 1.$$

Operant, i usant que $a_0^2 - b_0^2 = 1/2$, arribem a a l'expressió de π desitjada.

$$\pi = \frac{2 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=0}^{\infty} 2^j(a_j^2 - b_j^2)} = \frac{4 \text{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2})}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)}.$$

Per tal d'acabar la prova, observem en primer lloc que com $\text{MAG}(1, 1/\sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, la següent successió

$$u_n = \frac{4a_n^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

té com a límit π . Ara bé, com que al pas n -èssim ja coneixem a_n i b_n , i a_{n+1} és més a prop del límit que a_n , és ben natural considerar la successió

$$z_n = \frac{4a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)} = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum_{j=1}^n 2^{j+1}(a_j^2 - b_j^2)},$$

que també convergeix a π i és la donada per l'algorisme. ■

4.3 Altres transformacions de Landen donades per mitjanes generalitzades

En aquesta secció recollirem altres transformacions de Landen que ens serviran per calcular diferents funcions transcendents. En particular estudiarem com calcular la mitjana harmònica-geomètrica i els resultats de Carlson ([21]) que estudien unificadament diversos casos.

4.3.1 La mitjana harmònico-geomètrica

És fàcil veure que si I és una integral primera del sistema dinàmic discret donat per F , és a dir si $I \circ F = I$, aleshores donada qualsevol aplicació bijectiva φ (una *conjugació*) es compleix que $L = I \circ \varphi$ és una integral primera del sistema dinàmic discret donat per $G = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi$. En efecte,

$$L \circ G = I \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi = I \circ F \circ \varphi = I \circ \varphi = L.$$

En llenguatge de sistemes dinàmics diríem que si F dóna lloc a un sistema dinàmic discret integrable, també ho és qualsevol sistema dinàmic discret conjugat a F .

Si prenem I i F com a (4.1.1) i (4.1.2), i $\varphi(a, b) = (1/a, 1/b)$, obtenim que

$$L(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{ab \, d\theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} = abI(b, a) = abI(a, b), \quad (4.3.1)$$

és una integral primera de

$$G(a, b) = \left(\frac{2ab}{a+b}, \sqrt{ab} \right).$$

Observem que la primera component de G és precisament la mitjana harmònica d' a i b . El límit (ℓ, ℓ) de la iteració $(a_{n+1}, b_{n+1}) = G^n(a_n, b_n)$ és el que s'anomena mitjana harmònico-geomètrica dels dos números, $\ell = \text{MHG}(a, b)$. Argumentant com a la prova de l'equació (4.2.1) obtenim que $L(a, b) = \text{MHG}(a, b)^{\pi/2}$. Per tant, usant (4.2.1) i (4.3.1) obtenim

$$\text{MAG}(a, b) \cdot \text{MHG}(a, b) = ab.$$

4.3.2 Els resultats de Carlson

En el treball [21], Carlson estén la igualtat (4.1.2) a altres tipus de mitjanes. Donats a i b positius, considerem per cada parell (i, j) on $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, les següents successions:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b, \\ a_{n+1} &:= f_i(a_n, b_n), & b_{n+1} &:= f_j(a_n, b_n), \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} f_1(a, b) &:= \frac{a+b}{2}, & f_2(a, b) &:= \sqrt{ab}, \\ f_3(a, b) &:= \sqrt{a \frac{a+b}{2}}, & f_4(a, b) &:= \sqrt{\frac{a+b}{2} b}. \end{aligned}$$

De manera anàloga al què hem vist quan estudiàvem la mitjana aritmètico-geomètrica, es pot veure que, un cop fixats i i j , les successions $\{a_n\}_n$ i $\{b_n\}_n$ definides anteriorment, convergeixen i ho fan al mateix límit, el qual denotarem com segueix

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n := \ell_{i,j}(a_0, b_0).$$

Recordem també que la funció Beta es defineix com

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1+t)^{-(m+n)} dt,$$

per m i n positius. Incloem a continuació el resultat de Carlson i la seva prova.

Teorema 4.3.1. ([21]) *Considerem la funció*

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) := \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty t^{r'-1} (t+a^2)^{-s} (t+b^2)^{-s'} dt, \quad (4.3.2)$$

on $r' = s + s' - r$. Si prenem els respectius paràmetres (r, s, s') d'acord amb la taula:

(i, j)	$F_{i,j}(a, b)$	(r, s, s')
$(1, 2)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 3)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a \frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(1, 4)$	$\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(2, 3)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{a \frac{a+b}{2}}\right)$	$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$(2, 4)$	$\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$
$(3, 4)$	$\left(\sqrt{a \frac{a+b}{2}}, \sqrt{\frac{a+b}{2} b}\right)$	$(1, 1, 1)$

s'obté que $R(r; s, s'; a^2, b^2)$ és una integral primera de la funció $F_{i,j}(a, b) := (f_i(a, b), f_j(a, b))$, $j > i$. Es a dir, pels (r, s, s') corresponents als $i < j$ considerats,

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = R(r; s, s'; f_i^2(a, b), f_j^2(a, b)). \quad (4.3.3)$$

A més, es compleix que

$$\ell_{i,j}(a, b) = \left(R(r; s, s'; a^2, b^2) \right)^{-\frac{1}{2r}}. \quad (4.3.4)$$

Demostració. Fixats a i b , considerem el canvi de variable $t = (s(s + f_2^2))/(s + f_1^2)$, on per simplicitat, denotem $f_k(a, b)$ per f_k . Aleshores,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{(s + f_3^2)(s + f_4^2)}{(s + f_1^2)^2}, \quad t + a^2 = \frac{(s + f_3^2)^2}{s + f_1^2}, \quad t + b^2 = \frac{(s + f_4^2)^2}{s + f_1^2}.$$

Substituint les tres igualtats a l'expressió (4.3.2) tenim

$$R(r; s, s'; a^2, b^2) = \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty s^{r'-1} (s + f_1^2)^{r-1} (s + f_2^2)^{r'-1} (s + f_3^2)^{1-2s} (s + f_4^2)^{1-2s'} ds. \quad (4.3.5)$$

Donada que la nostra intenció és provar que (4.3.2) és integral primera de $F_{i,j}$, s'haurà de complir que coincideixin els integrands de (4.3.2) i (4.3.5). Per exemple, considerem el cas $i = 1$ i $j = 2$, que correspon al cas de la mitjana aritmètico-geomètrica anteriorment estudiat. Aleshores les expressions que contenen f_3 i f_4 no haurien d'aparèixer en (4.3.5), i per tant:

$$1 - 2s = 0, \quad 1 - 2s' = 0, \quad r - 1 = -s, \quad r' - 1 = -s'.$$

Així doncs, obtenim que $s = s' = r = r' = 1/2$, que són precisament el valors que apareixen a la taula. De la mateixa manera, provaríem el reste de casos.

Per a calcular $\ell_{i,j}(a, b)$, denotem per $R_S(a^2, b^2)$ la funció corresponent $R(r; s, s'; a^2, b^2)$ obtinguda, un cop fixats el valors de $(r; s, s')$. Com que acabem de veure que independentment del valor de $n \in \mathbb{N}$ es compleix que:

$$R_S(a^2, b^2) = R_S((f_i^n(a, b))^2, (f_j^n(a, b))^2),$$

prenent límits a ambdós costats obtenim

$$\begin{aligned} R_S(a^2, b^2) &= R_S(\ell_{i,j}^2(a, b), \ell_{i,j}^2(a, b)) = \frac{1}{B(r, r')} \int_0^\infty t^{r'-1} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s} (t + \ell_{i,j}^2)^{-s'} dt \\ &= \frac{1}{B(r, r')} \ell_{i,j}^{2r'-2s-2s'}(a, b) \int_0^\infty u^{r'-1} (u + 1)^{-s} (u + 1)^{-s'} du \\ &= \ell_{i,j}^{-2r}(a, b) \frac{B(r', r)}{B(r, r')} = \ell_{i,j}^{-2r}(a, b), \end{aligned}$$

on, en el darrer pas, hem usat que $B(r, r') = B(r', r)$, veure per exemple [2]. Per tant es compleix (4.3.4). ■

Quan $(i, j) = (1, 2)$, la integral primera

$$R\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; a^2, b^2\right) = \frac{1}{B(1/2, 1/2)} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}},$$

coincideix, mòdul una constant, amb la donada per la igualtat (4.1.2) ja que es pot veure que si $a^2 > b^2 > 0$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t+a^2)(t+b^2)}} = \frac{2}{a\pi} K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{2}{\pi} I(a, b).$$

Altres exemples similars als del Teorema 4.3.1 estan desenvolupats a [18].

4.4 Transformades en integrals racionals

En aquesta secció buscarem transformades de Landen de certes integrals definides de tipus racional (concretament, d'aquelles que estan formades per quocients de polinomis parells de manera que el grau del denominador superi en dues unitats al del numerador, per a assegurar la convergència de la integral). Recollirem alguns dels resultats de [16] i [17] (vegeu també [63, 64, 70]). De fet, el mètode proposat en aquestes referències no és tant simple com el que hem tractat a la Secció 4.2.2, per tant començarem amb un cas senzill, per passar tot seguit al cas general i les seves aplicacions.

Així doncs, per il·lustrar el mètode, comencen primer amb la integral racional amb denominador de grau 4 on usarem les tècniques desenvolupades pel cas anàleg de grau 6 a [70].

Teorema 4.4.1. *Per $a > -2$ definim*

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx, \quad (4.4.1)$$

i també

$$F(a, b, c) = \left(2, \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}, \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}\right).$$

Aleshores es verifica que $I(F(a, b, c)) = I(a, b, c)$, és a dir, $I(a, b, c)$ és una integral primera del sistema dinàmic discret generat per F .

Fixem-nos que el polinomi del denominador és mònic però que això no és restrictiu. Així mateix, el terme independent és 1. Aquest fet tampoc no és restrictiu ja que en cas contrari sempre el podríem aconseguir via un canvi de variable.

Val a dir, que la integral racional del resultat anterior es podria calcular mitjançant els mètodes habituals, és a dir, descomposant el denominador en funció de les seves arrels

i calculant les integrals de les fraccions simples resultants. Veurem que la proposició dóna una manera alternativa per a calcular el valor de la integral.

Demostrem l'anterior resultat a la Secció 4.4.1, i també novament a la Secció 4.4.3 usant un resultat auxiliar que introduïrem a la Secció 4.4.2 (el Teorema 4.4.5).

A la Secció 4.4.4 demostrarem el següent resultat:

Teorema 4.4.2 ([16] i [17]). *Per a, b tals que $x^6 + ax^4 + bx^2 + 1 > 0$, considerem la integral*

$$I(a, b, c, d, e) := \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx,$$

i la funció $F(a, b, c, d, e) = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1)$, on:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}}, \\ b_1 &= \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}}, \\ c_1 &= \frac{d + e + c}{(a + b + 2)^{2/3}}, \\ d_1 &= \frac{(b + 3)c + (a + 3)e + 2d}{a + b + 2}, \\ e_1 &= \frac{c + e}{(a + b + 2)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Aleshores es compleix que $I(a, b, c, d, e) = I(F(a, b, c, d, e))$.

Tal i com es demostra a [23, 69] (vegeu també [71, Cap. 15]), si escrivim $F(a, b, c, d, e) = (G(a, b), H(a, b, c, d, e))$, on

$$\begin{aligned} G(a, b) &= \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^4}}, \frac{a + b + 6}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^2}} \right), \\ H(a, b, c, d, e) &= \left(\frac{c + d + e}{\sqrt[3]{(a + b + 2)^2}}, \frac{(b + 3)c + (a + 3)e + 2d}{a + b + 2}, \frac{c + e}{\sqrt[3]{a + b + 2}} \right), \end{aligned}$$

els valors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $I(a, b, c, d, e)$ és finita, són aquells tals que $\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(a, b) = (3, 3)$, la qual cosa permet el càlcul efectiu de la integral. Al proper capítol mostrarem la complexitat de la transformació G quan se la considera definida a tot el pla real.

A la Secció 4.4.5, demostrarem el següent resultat:

Teorema 4.4.3 ([16] i [17]). *Per a, b i c tals que $x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1 > 0$, considerem la integral*

$$I(a, b, c, d, e, f, g) := \int_0^\infty \frac{dx^6 + ex^4 + fx^2 + g}{x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1} dx$$

i la funció $F(a, b, c, d, e, f, g) = (a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1)$, on:

$$a_1 = \frac{(a+c)(10+b) + 4(ac+2b+4)}{(a+b+c+2)^{3/2}},$$

$$b_1 = \frac{c(a+6) + 2(b+3a+10)}{a+b+c+2},$$

$$c_1 = \frac{8+a+c}{(a+b+c+2)^{1/2}},$$

$$d_1 = \frac{d+g+e+f}{(a+b+c+2)^{3/4}},$$

$$e_1 = \frac{4e+4f+6d+6g+c(e+3d)+g(3a+b)+db+fa}{(a+b+c+2)^{5/4}},$$

$$f_1 = \frac{g(a+5)+d(c+5)+e+f}{(a+b+c+2)^{3/4}},$$

$$g_1 = \frac{d+g}{(a+b+c+2)^{1/4}}.$$

Aleshores es verifica que $I(a, b, c, d, e, f, g) = I(F(a, b, c, d, e, f, g))$.

Finalment, a la Secció 4.5 aplicarem els Teoremes 4.4.2 i 4.4.3 al càlcul aproximat d'integrals.

4.4.1 Demostració del Teorema 4.4.1

Intuïtivament podríem dir que el procés de construcció de transformacions de Landen consisteix en fer una sèrie de canvis trigonomètrics que a continuació es desfan, però el procés complert no és tautològic degut a que en un punt intermedi alguns sumands de la integral desapareixen degut a certes simetries. Per aquesta raó començarem aquesta secció amb la següent observació que ens mostra algunes integrals que valen zero.

Lema 4.4.4. Donat $k \in \mathbb{N}$ imparell i P un polinomi parell que no s'anul·la a l'interval $[-1, 1]$,

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = 0.$$

Demostració. Aplicant el canvi de variables $t = \pi - s$, tenim

$$\int_0^\pi \frac{\cos^k t}{P(\cos t)} dt = \int_0^\pi \frac{\cos^k(\pi - s)}{P(\cos(\pi - s))} ds = \int_0^\pi \frac{(-\cos s)^k}{P(-\cos s)} ds = - \int_0^\pi \frac{\cos^k s}{P(\cos s)} ds,$$

i per tant la integral s'anul·la, tal i com volíem demostrar. ■

Demostració del Teorema 4.4.1. Considerem el denominador de la integral $Q_4(x) = x^4 + ax^2 + 1$ i, multipliquem el numerador i el denominador de la fracció que volem integrar pel terme[‡] $x^4 \cdot Q_4(\frac{1}{x})$. Fent això, obtenim:

$$I(a, b, c) = \int_0^\infty \frac{bx^6 + (ab + c)x^4 + (ac + b)x^2 + c}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} dx.$$

Considerem ara el canvi de variable trigonomètric $x = \tan \theta$ i simplifiquem:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{b \sin^6 \theta + (ab + c) \sin^4 \theta \cos^2 \theta + (ac + b) \sin^2 \theta \cos^4 \theta + c \cos^6 \theta}{(\sin^8 \theta + \cos^8 \theta) + 2a(\sin^6 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^6 \theta) + (a^2 + 2) \sin^4 \theta \cos^4 \theta} d\theta.$$

Apliquem ara la relació trigonomètrica fonamental (d'ara en endavant RTF) i considerem les relacions amb l'angle doble següents:

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}. \quad (4.4.2)$$

Prenent $u = \cos(2\theta)$, per tal d'alleugerir la notació, arribem a:

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{Au^3 + Bu^2 + Cu + D}{Eu^4 + Fu^2 + H} d\theta,$$

on els paràmetres A, B, C, D, E, F i H, venen descrits per les següents relacions:

$$\begin{aligned} A &= ab - ac + 2c - 2b, \\ B &= 2b + 2c - ab - ac, \\ C &= 2c - 2b + ac - ab, \\ D &= 2b + 2c + ab + ac, \\ E &= (a - 2)^2, \\ F &= 8 - 2a^2, \\ H &= (a + 2)^2. \end{aligned}$$

[‡]Fem això per fer simètric el denominador. En aquest cas no caldria fer-ho ja que el denominador ja és simètric. Tot i així, ho fem per il·lustrar el mètode.

Considerem ara el canvi de variable $t = 2\theta$ i anomenem $v = \cos t$, arribant a la integral:

$$I = \int_0^\pi \frac{Av^3 + Bv^2 + Cv + D}{Ev^4 + Fv^2 + H} dt.$$

En aquest punt, apliquem el Lema 4.4.4, per la qual cosa la integral resultant equivalent serà:

$$I = \int_0^\pi \frac{Bv^2 + D}{Ev^4 + Fv^2 + H} dt.$$

Tornem a expressar ara la nostra funció en base a l'angle doble, on $v^2 = \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. Prenent $s = 2t$ i $\cos(2t) = \cos s = w$, ens quedarà:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{A_2w + B_2}{C_2w^2 + D_2w + E_2} ds,$$

on, novament, per alleugerir la notació, definim els paràmetres:

$$\begin{aligned} A_2 &= 2b + 2c - ab - ac, \\ B_2 &= 6b + 6c + ab + ac, \\ C_2 &= (a - 2)^2, \\ D_2 &= -2a^2 - 8a + 24, \\ E_2 &= (a + 6)^2. \end{aligned}$$

La integral anterior, per simetria i periodicitat de la funció cosinus, es pot rescriure com:

$$I = 2 \int_0^\pi \frac{A_2w + B_2}{C_2w^2 + D_2w + E_2} ds,$$

i si en aquesta última li apliquem el primer canvi trigonomètric que hem fet, però invertit, és a dir, $r = \tan(s/2)$, acabem obtenint una integral similar a (4.4.1), concretament:

$$I = \int_0^\infty \frac{A_3r^2 + B_3}{C_3r^4 + D_3r^2 + E_3} dr,$$

amb els paràmetres definits tal i com segueixen:

$$\begin{aligned} A_3 &= 2(2b + 2c + ab + ac), \\ B_3 &= 8(b + c), \\ C_3 &= (a + 2)^2, \\ D_3 &= 8(a + 2), \\ E_3 &= 16. \end{aligned}$$

L'únic que ens queda per fer, per tal d'aconseguir que siguin igual llevat de constants, és normalitzar els coeficients del denominador.

Per tant, primer dividirem tot el denominador per E_3 i, després aplicarem el canvi de variable $z = r(C_3/E_3)^{1/4}$, per tal d'arribar al resultat:

$$I = \int_0^\infty \frac{b_1 z^2 + c_1}{z^4 + a_1 z^2 + 1} dz,$$

on els paràmetres a_1 , b_1 i c_1 venen donats per:

$$a_1 = 2, \quad b_1 = \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}, \quad c_1 = \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}.$$

■

Fixem-nos que gràcies a aquest resultat podem calcular el valor de la integral, donat que:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{b_1 x^2 + c_1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = b_1 \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= b_1 \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = b_1 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = b_1 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi(b+c)}{2\sqrt{a+2}}. \end{aligned}$$

4.4.2 Integrals racionals amb denominador de grau múltiple de 4 i simètric. Teorema de reducció

En aquesta secció demostrem i ampliem un resultat proposat a [17, pàg. 652], el qual s'aplica a funcions racionals tals que el seu numerador està format per un monomi de grau parell. Usant la linealitat de la integral podem aplicar aquest resultat per les funcions que aparèixen als Teoremes 4.4.1, 4.4.2 i 4.4.3.

Teorema 4.4.5. *Considerem una funció racional composta per un monomi parell al numerador i un polinomi simètric parell que no s'anul·la i de grau múltiple de 4 al denominador.*

Sigui $n, p \in \mathbb{N}$, escrivim el polinomi del denominador com:

$$D_p(d_1, d_2, \dots, d_p; z) = \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (z^{2k} + z^{4p-2k}),$$

on els $d_i \in \mathbb{R}^+$. Aleshores, podem veure que per $0 \leq n \leq p-1$, es verifica:

$$N_{n,p} := \int_0^\infty \frac{z^{2n}}{D_p(d_1, d_2, \dots, d_p; z)} dz = \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{p-n-1} A_j z^{2(p-j-1)}}{z^{2p} + \sum_{i=1}^p B_i z^{2(p-i)}} dz, \quad (4.4.3)$$

on els paràmetres A_j i B_i venen donats per:

$$A_j = \binom{p-n-1+j}{2j} \frac{2^{2j+1-2p}}{d_{1+p}} \left(\frac{2^{2p-1} d_{1+p}}{\sum_{j=1}^{p+1} d_j} \right)^{\frac{2(p-j)-1}{2p}},$$

$$B_i = \frac{2^{2(i-p)}}{d_{1+p}} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right) \left(\frac{2^{2p-1} d_{1+p}}{\sum_{j=1}^{p+1} d_j} \right)^{\frac{2(p-i)}{2p}}.$$

A més, per $p-1 < n \leq 2p-1$, es compleix la simetria $N_{n,p} = N_{2p-1-n,p}$.

Fixem-nos que aquest no és un resultat d'invariància del tipus de funció a integrar (que és el tema que ens ocupa), sinó que és un teorema de reducció del grau del denominador de la integral. Ara bé, fixem-nos que quan considerem integrals de funcions racionals tals que el denominador no és simètric, multipliquem la funció per un factor que el simetritza però que a la seva vegada en duplica el grau (vegeu la demostració del Teorema 4.4.1, per exemple). Aquest resultat ens garanteix doncs, la invariància de la funció. Vegeu, per exemple el pas de l'expressió (4.4.7) a l'expressió (4.4.8), a la Secció 4.4.3.

Demostració del Teorema 4.4.5. Per veure el resultat proposat, en el cas $0 \leq n \leq p-1$, apliquem els mateixos passos que hem vist a l'apartat anterior, excepte la simetrització del denominador. Per tant comencem amb el canvi de variable trigonomètric $z = \tan \theta$ que ens dóna:

$$N_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin \theta)^{2n} (\cos \theta)^{4p-2n-2}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left((\sin \theta)^{2k} (\cos \theta)^{4p-2k} + (\sin \theta)^{4p-2k} (\cos \theta)^{2k} \right)} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin^2 \theta)^n (\cos^2 \theta)^{2p-n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left((\sin^2 \theta)^k (\cos^2 \theta)^{2p-k} + (\sin^2 \theta)^{2p-k} (\cos^2 \theta)^k \right)} d\theta.$$

Apliquem ara la RTF i el canvi a l'angle doble descrit anteriorment en (4.4.2) i, a més a més, notem $2\theta = \psi$ i $\cos(2\theta) = D$ per tal d'alleugerir la notació, arribant a:

$$N_{p,q} = \int_0^\pi \frac{\frac{(1-D)^n (1+D)^{2p-n-1}}{2^n 2^{2p-n-1}}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left(\frac{(1-D)^k (1+D)^{2p-k}}{2^k 2^{2p-k}} + \frac{(1-D)^{2p-k} (1+D)^k}{2^{2p-k} 2^k} \right)} \frac{d\psi}{2}$$

$$= \int_0^\pi \frac{(1-D)^n (1+D)^{2p-n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left((1-D)^k (1+D)^{2p-k} + (1-D)^{2p-k} (1+D)^k \right)} d\psi$$

$$= \int_0^\pi \frac{(1-D)^n (1+D)^{2p-n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-D)^k (1+D)^k \left((1+D)^{2p-2k} + (1-D)^{2p-2k} \right)} d\psi.$$

Fixem-nos que en aquest darrer pas i, a diferència del cas anteriorment estudiat, hem multiplicat la nostra funció racional per factors del tipus $(1 \pm D)^k$ per tal d'aconseguir els mateixos exponents en una part del denominador. Això ho fem, perquè al desenvolupar aquestes binomis, hi haurà termes que se'ns anul·laran, tot afavorint l'expressió final. Si continuem, l'anterior expressió es pot escriure de la manera següent:

$$\begin{aligned} N_{p,q} &= \int_0^\pi \frac{(1-D)^n (1+D)^{2p-n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-D^2)^k \left((1+D)^{2p-2k} + (1-D)^{2p-2k} \right)} d\psi \\ &= \int_0^\pi \frac{(1-D)^n (1+D)^{2p-n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-D^2)^k \sum_{j=0}^{p-k} 2 \binom{2p-2k}{2j} D^{2j}} d\psi \\ &= \int_0^\pi \frac{(1-D^2)^n (1+D)^{2p-2n-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-D^2)^k \sum_{j=0}^{p-k} 2 \binom{2p-2k}{2j} D^{2j}} d\psi. \end{aligned}$$

Aplicant el Lema 4.4.4, obtenim:

$$N_{p,q} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{(1-D^2)^n \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} D^{2j}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-D^2)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} D^{2j}} d\psi.$$

Tornem a expressar ara la nostra funció en base a l'angle doble (veure (4.4.2), d'on en podem extreure $D^2 = \cos^2 \psi = (1+E)/2$, prenent $E = \cos \varphi$ i $\varphi = 2\psi$), aleshores ens quedarà:

$$\begin{aligned} N_{p,q} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\frac{1-E}{2}\right)^n \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} \left(\frac{1+E}{2}\right)^j d\varphi}{2 \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left(\frac{1-E}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} \left(\frac{1+E}{2}\right)^j} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2^{-n} (1-E)^n \left(\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+E)^j 2^{p-n-1-j} \right) 2^{1+n-p} 2^{-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-E)^k 2^{-k} 2^{k-p} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+E)^j 2^{p-k-j}} d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(1-E)^n \left(\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+E)^j 2^{p-n-1-j} \right)}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-E)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+E)^j 2^{p-k-j}} d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \frac{(1-E)^n \left(\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+E)^j 2^{p-n-1-j} \right)}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (1-E)^k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+E)^j 2^{p-k-j}} d\varphi,
 \end{aligned}$$

on a la última igualtat hem usat la periodicitat i la simetria de la funció cosinus. Si en aquesta última apliquem l'invers del primer canvi trigonomètric que hem fet, és a dir, $x = \tan(\varphi/2)$, arribem a:

$$\begin{aligned}
 N_{p,q} &= \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}} \frac{\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+x^2)^{-j}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+x^2)^{-j}} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{x^{2n} \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+x^2)^{-n-j-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} x^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+x^2)^{-k-j}} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{x^{2n} \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+x^2)^{p-n-j-1}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} x^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+x^2)^{p-k-j}} dx. \tag{4.4.4}
 \end{aligned}$$

Ara ens caldria arreglar l'anterior expressió, per tal de poder normalitzar després els coeficients. Per tant, considerem el numerador i li apliquem el Lema D de l'Apèndix, prenent $N = p - n - 1$. Amb això arribem a:

$$\begin{aligned}
 x^{2n} \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{2p-2n-1}{2j} (1+x^2)^{p-n-j-1} &= \sum_{j=0}^N \binom{N+j}{2j} 4^j x^{2(N+n-j)} \\
 &= \sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{p-n-1+j}{2j} 4^j x^{2(p-1-j)}. \tag{4.4.5}
 \end{aligned}$$

Ara fem el mateix pel denominador, aplicant el Lema F de l'Apèndix,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} x^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+x^2)^{p-k-j} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^{p+1} d_j \right) x^{2p} + \sum_{i=1}^p 2^{2i-1} x^{2(p-i)} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right). \tag{4.4.6}
 \end{aligned}$$

Per tant, si apliquem els resultats (4.4.5) i (4.4.6) a (4.4.4), obtenim:

$$N_{p,q} = \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{p-n-1+j}{2j} 4^j x^{2(p-1-j)}}{\left(\sum_{j=1}^{p+1} d_j \right) x^{2p} + \sum_{i=1}^p 2^{2i-1} x^{2(p-i)} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right)} dx.$$

En aquest punt només ens cal normalitzar els coeficients. Per tant, ens cal dividir els dos termes de la funció racional pel terme independent del denominador. Aquest terme correspon a $i = p$ en el sumatori inferior i és $2^{2p-1} \cdot d_{1+p}$, on val a dir que el terme $d_{1+p} = 1$ perquè el polinomi que considerem és mònic. Per tant:

$$N_{p,q} = \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{p-n-1+j}{2j} \frac{2^{2j+1-2p}}{d_{1+p}} x^{2(p-1-j)}}{\frac{\sum_{j=1}^{p+1} d_j}{2^{2p-1} d_{1+p}} x^{2p} + \sum_{i=1}^p \frac{2^{2(i-p)}}{d_{1+p}} x^{2(p-i)} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right)} dx.$$

Finalment, apliquem un últim canvi de variable per tal que el coeficient de grau màxim del denominador sigui 1, és a dir, per tal d'aconseguir que el denominador sigui mònic. Concretament, apliquem el canvi

$$x = z \left(\frac{2^{2p-1} \cdot d_{1+p}}{\sum_{j=1}^{p+1} d_j} \right)^{\frac{1}{2p}}$$

al resultat anterior i demostrem així la primera part del teorema:

$$N_{p,q} = \int_0^\infty \frac{\sum_{j=0}^{p-n-1} \binom{p-n-1+j}{2j} \frac{2^{2j+1-2p}}{d_{1+p}} \left(\frac{2^{2p-1} \cdot d_{1+p}}{\sum_{j=1}^{p+1} d_j} \right)^{\frac{2(p-j)-1}{2p}} z^{2(p-1-j)}}{z^{2p} + \sum_{i=1}^p \frac{2^{2(i-p)}}{d_{1+p}} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right) \left(\frac{2^{2p-1} \cdot d_{1+p}}{\sum_{j=1}^{p+1} d_j} \right)^{\frac{2(p-i)}{2p}} z^{2(p-i)}} dz.$$

Demostrem ara la regla de simetria $N_{n,p} = N_{2p-1-n,p}$ per $p-1 < n \leq 2p-1$:

$$N_{n,p}(d_1, d_2, \dots, d_p) = \int_0^\infty \frac{z^{2n}}{D_p(d_1, d_2, \dots, d_p; z)} dz = \int_0^\infty \frac{z^{2n}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (z^{4p-2k} + z^{2k})} dz.$$

Considerem el canvi de variable $z = 1/x$, per la qual cosa:

$$\begin{aligned}
 N_{n,p}(d_1, d_2, \dots, d_p) &= - \int_{\infty}^0 \frac{\frac{1}{x^{2n+2}}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \left(\frac{1}{x^{4p-2k}} + \frac{1}{x^{2k}} \right)} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{x^{2n+2}}}{\frac{1}{x^{4p}} \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (x^{2k} + x^{4p-2k})} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{4p}}{x^{2n+2} \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (x^{2k} + x^{4p-2k})} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{x^{2(2p-n-1)}}{\sum_{k=0}^p d_{p+1-k} (x^{2k} + x^{4p-2k})} dx = N_{2p-n-1,p}(d_1, d_2, \dots, d_p).
 \end{aligned}$$

■

4.4.3 Funcions amb denominador de grau 4 via el Teorema de reducció

Considerarem ara dues maneres diferents d'estudiar la integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx.$$

Primerament, pel què hem vist al Teorema 4.4.5, tenim:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + ax^2 + 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + ax^2 + 1} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+2}}}{x^2 + 1} dx.$$

Per tant, en general tenim que:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx = (b + c) \int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+2}}}{x^2 + 1} dx = \frac{b + c}{\sqrt{a+2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi(b + c)}{2\sqrt{a+2}}.$$

A diferència del cas (4.4.1), aquí no veiem una invariància de la integral, donat que al tenir el denominador simètric, ja hem aplicat directament el resultat del Teorema 4.4.5, i per tant hem reduït la integral a una d'immediata.

Suposem ara, que no haguéssim vist que el denominador era simètric i que l'haguéssim multiplicat pel factor que el fa simètric (en aquest cas $x^4 \cdot Q_4(1/x)$). Aleshores:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{bx^2 + c}{x^4 + ax^2 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{bx^6 + (ab + c)x^4 + (ac + b)x^2 + c}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} dx. \quad (4.4.7)$$

Per tant, podem aplicar el resultat obtingut en el Teorema 4.4.5 tenint en compte que $d_3 = 1$, $d_2 = 2a$ i $d_1 = (a^2 + 2)/2$, obtenint així:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dx}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} \\ &= \int_0^\infty \frac{x^6 dx}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} = \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}} + \frac{1}{(a+2)^{1/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

i

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} \\ &= \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{x^8 + 2ax^6 + (a^2 + 2)x^4 + 2ax^2 + 1} = \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Tenint en compte (4.4.8) i (4.4.9), i substituint a (4.4.7), veiem que:

$$\begin{aligned} I &= (b+c) \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}} + \frac{1}{(a+2)^{1/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx + (ab+c+ac+b) \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= (b+c) \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}} + \frac{1}{(a+2)^{1/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx + (a+1)(b+c) \int_0^\infty \frac{\frac{x^2}{(a+2)^{3/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{\frac{(a+2)(b+c)x^2}{(a+2)^{3/2}} + \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \int_0^\infty \frac{\frac{(b+c)x^2}{(a+2)^{1/2}} + \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}}}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \frac{b+c}{(a+2)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Aquest és el resultat del Teorema 4.4.1, donat que si continuem amb el càlcul de la integral, arribem de nou a:

$$I = \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{b+c}{\sqrt{a+2}} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi(b+c)}{2\sqrt{a+2}}.$$

4.4.4 Demostració del Teorema 4.4.2

Com a nova aplicació del Teorema de reducció demostrarem el Teorema 4.4.2.

Demostració del Teorema 4.4.2. Considerem la integral racional amb denominador de grau 6, no simètric

$$I = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx$$

el qual el simetritzem, multiplicant la fracció pel terme $x^6 \cdot Q_6(1/x)$, obtenint així:

$$I = \int_0^\infty \frac{\text{num}_{10}(x)}{\text{den}_{12}(x)} dx, \quad (4.4.10)$$

on:

$$\text{num}_{10}(x) = cx^{10} + (d + cb)x^8 + (e + db + ca)x^6 + (eb + da + c)x^4 + (ea + d)x^2 + e,$$

$$\text{den}_{12}(x) = (x^{12} + 1) + (a + b)(x^{10} + x^2) + (b + ba + a)(x^8 + x^4) + (b^2 + a^2 + 2)x^6.$$

Estem doncs en condicions d'aplicar el Teorema 4.4.5, prenent com a paràmetres $d_1 = (b^2 + a^2 + 2)/2$, $d_2 = b + ba + a$, $d_3 = a + b$, $d_4 = 1$, i tenint en compte que $N_{3,3} = N_{2,3}$, $N_{4,3} = N_{1,3}$ i $N_{5,3} = N_{0,3}$ per la simetria de la integral. Per tant, anem a calcular primer els coeficients B_i , els quals veiem que no depenen de n .

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2^{2(1-3)}}{d_4} \left(\sum_{j=1}^3 j \binom{j}{j-1} d_{j+1} \right) \left(\frac{2^{2 \cdot 3 - 1} d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-1)}{2 \cdot 3}} \\ &= 2^{-2/3} (d_2 + 4d_3 + 9d_4) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{2/3}} \\ &= \frac{d_2 + 4d_3 + 9d_4}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4))^{2/3}} = \frac{5a + 5b + ab + 9}{(a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 4b + 4)^{2/3}} \\ &= \frac{5a + 5b + ab + 9}{((a + b + 2)^2)^{2/3}} = \frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \frac{2^{2(2-3)}}{d_4} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{j+1}{2} \binom{j+2}{j-1} d_{j+2} \right) \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-2)}{2 \cdot 3}} \\
 &= 2^{5/3-2} (1 \cdot 1 \cdot d_3 + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot d_4) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/3}} \\
 &= 2^{-1/3} (a + b + 6) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/3}} \\
 &= \frac{a + b + 6}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4))^{1/3}} = \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}}, \\
 B_3 &= \frac{2^{2(3-3)}}{d_4} \left(\sum_{j=1}^1 \frac{j+2}{3} \binom{j+4}{j-1} d_{j+3} \right) \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-3)}{2 \cdot 3}} \\
 &= 1 \frac{3}{3} \binom{5}{0} d_4 = 1.
 \end{aligned}$$

Calculem ara els coeficients A_j , els quals depenen de n . Per $n = 0$ tenim que $j = 0, 1, 2$. Per tant:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \binom{2}{0} \frac{2^{-5}}{d_4} \left(\frac{2^{2 \cdot 3 - 1} d_4}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-0)-1}{2 \cdot 3}} = 2^{-5} \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{5/6} \\
 &= 2^{-5+25/6} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{5/6}} = \frac{1}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4))^{5/6}} \\
 &= \frac{1}{((a + b + 2)^2)^{5/6}} = \frac{1}{(a + b + 2)^{5/3}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \binom{3}{2} 2^{-3} \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-1)-1}{2 \cdot 3}} = 3 \cdot 2^{-3} \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{1/2} \\
 &= 3 \cdot 2^{-3+5/2} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/2}} = 3 \cdot 2^{-1/2} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/2}} \\
 &= \frac{3}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4))^{1/2}} = \frac{3}{((a+b+2)^2)^{1/2}} = \frac{3}{a+b+2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \binom{4}{4} 2^{-1} \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{\frac{2(3-2)-1}{2 \cdot 3}} = 1 \cdot 2^{-1} \left(\frac{2^5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} \right)^{1/6} \\
 &= 2^{-1+5/6} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/6}} = 2^{-1/6} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4)^{1/6}} \\
 &= \frac{1}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4))^{1/6}} = \frac{1}{((a+b+2)^2)^{1/6}} = \frac{1}{(a+b+2)^{1/3}}.
 \end{aligned}$$

Per $n = 1$ tenim que $j = 0, 1$. Fixem-nos que només hem de recalculer els nombres combinatoris del principi del coeficient, donat que la part posterior és exactament la mateixa.

$$A_0 = \binom{1}{0} \frac{1}{(a+b+2)^{5/3}} = \frac{1}{(a+b+2)^{5/3}},$$

$$A_1 = \binom{2}{2} \frac{1}{a+b+2} = \frac{1}{a+b+2}.$$

Finalment, per $n = 2$ tenim que $j = 0$, per tant:

$$A_0 = \binom{3-2-1-0}{2 \cdot 0} \frac{1}{(a+b+2)^{5/3}} = \frac{1}{(a+b+2)^{5/3}}.$$

Com podem veure, els coeficients A_0 són iguals per $n = 0, 1, 2$ (per tant, també ho seran per $n = 3, 4, 5$ per simetria) i, l' A_1 de $n = 0$ i de $n = 1$ només difereix en la

constant 3, per tant, d'ara en endavant, reanomenem A_1 pensant que hi ha un 1 al numerador. Així doncs, substituint aquests coeficients en (4.4.10) obtenim:

$$\begin{aligned}
 I &= (c + e) \int_0^\infty \frac{dx}{\text{den}_{12}(x)} + (d + cb + ea + d) \int_0^\infty \frac{x^2}{\text{den}_{12}(x)} dx \\
 &\quad + (e + db + ca + eb + da + c) \int_0^\infty \frac{x^4}{\text{den}_{12}(x)} dx \\
 &= (c + e) \int_0^\infty \frac{A_0 x^4 + 3A_1 x^2 + A_2}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} dx + (cb + ea + 2d) \int_0^\infty \frac{A_0 x^4 + A_1 x^2}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} dx \\
 &\quad + (e + db + ca + eb + da + c) \times \int_0^\infty \frac{A_0 x^4 dx}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} \\
 &= \int_0^\infty \frac{A_0(c + e + cb + ea + 2d + e + db + ca + eb + da + c)x^4 dx}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} \\
 &\quad + \int_0^\infty \frac{A_1(3c + 3e + cb + ea + 2d)x^2 dx}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} + \int_0^\infty \frac{A_2(c + e) dx}{x^6 + B_1 x^4 + B_2 x^2 + 1} \\
 &= \int_0^\infty \frac{c_1 x^4 + d_1 x^2 + e_1}{x^6 + a_1 x^4 + b_1 x^2 + 1} dx.
 \end{aligned}$$

On els paràmetres a_1, b_1, c_1, d_1 i e_1 , venen donats per:

$$a_1 = B_1 = \frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}},$$

$$b_1 = B_2 = \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}},$$

$$c_1 = A_0(c + e + cb + ea + 2d + e + db + ca + eb + da + c)$$

$$= \frac{1}{(a + b + 2)^{5/3}} (c + e + cb + ea + 2d + e + db + ca + eb + da + c)$$

$$= \frac{(d + e + c)(a + b + 2)}{(a + b + 2)^{5/3}} = \frac{d + e + c}{(a + b + 2)^{2/3}},$$

$$d_1 = A_1(3c + 3e + cb + ea + 2d) = \frac{1}{a + b + 2} (3c + 3e + cb + ea + 2d)$$

$$= \frac{(b + 3)c + (a + 3)e + 2d}{a + b + 2},$$

$$e_1 = A_2(c + e) = \frac{c + e}{(a + b + 2)^{1/3}}.$$

■

4.4.5 Demostració del Teorema 4.4.3

Demostració del Teorema 4.4.3. Considerem la integral racional amb denominador de grau 8, no simètric

$$I = \int_0^\infty \frac{dx^6 + ex^4 + fx^2 + g}{x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + 1} dx$$

el qual fem simètric multiplicant la fracció pel terme $x^8 \cdot Q_8(1/x)$, obtenint així:

$$I = \int_0^\infty \frac{\text{num}_{14}(x)}{\text{den}_{16}(x)} dx, \quad (4.4.11)$$

On:

$$\begin{aligned} \text{num}_{14}(x) &= dx^{14} + (e + dc)x^{12} + (ec + f + db)x^{10} + (da + fc + eb + g)x^8 \\ &\quad + (d + fb + ea + gc)x^6 + (gb + e + fa)x^4 + (ga + f)x^2 + g, \\ \text{den}_{16}(x) &= (x^{16} + 1) + (c + a)(x^{14} + x^2) + (ca + 2b)(x^{12} + x^4) + (a + cb + ba + c) \\ &\quad \times (x^{10} + x^6) + (2 + b^2 + c^2 + a^2)x^8. \end{aligned}$$

Com en els casos anteriors, estem en condicions d'aplicar el Teorema 4.4.5, prenent com a paràmetres $d_1 = (2 + a^2 + b^2 + c^2)/2$, $d_2 = a + cb + ba + c$, $d_3 = ca + 2b$, $d_4 = c + a$ i $d_5 = 1$ i, tenint en compte que $N_{4,4} = N_{3,4}$, $N_{5,4} = N_{2,4}$, $N_{6,4} = N_{1,4}$ i $N_{7,4} = N_{0,4}$ per la simetria demostrada en la integral. Per tant calculem primer els coeficients B_i del

teorema, els quals no depenen de n :

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{2^{2(1-4)}}{d_5} \left(\sum_{j=1}^4 j \binom{j}{j-1} d_{j+1} \right) \left(\frac{2^{2 \cdot 4 - 1} d_5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-1)}{2 \cdot 4}} \\
 &= 2^{-6+42/8} (d_2 + 2 \cdot 2 \cdot d_3 + 3 \cdot 3 \cdot d_4 + 4 \cdot 4 \cdot d_5) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{6/8}} \\
 &= 2^{-6/8} (d_2 + 4d_3 + 9d_4 + 16d_5) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{6/8}} \\
 &= \frac{a + cb + ba + c + 4ca + 8b + 9c + 9a + 16}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{6/8}} \\
 &= \frac{10a + 10c + cb + ba + 4ca + 8b + 16}{((a + b + c + 2)^2)^{6/8}} \\
 &= \frac{10(a + c) + b(a + c) + 4(4 + 2b + ac)}{((a + b + c + 2)^2)^{3/4}} \\
 &= \frac{(a + c)(10 + b) + 4(ac + 2b + 4)}{(a + b + c + 2)^{3/2}}, \\
 B_2 &= \frac{2^{2(2-4)}}{d_5} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{j+1}{2} \binom{j+2}{j-1} d_{j+2} \right) \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-2)}{2 \cdot 4}} \\
 &= 2^{28/8-4} (1 \cdot 1 \cdot d_3 + \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot d_4 + 2 \cdot 10 \cdot d_5) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{4/8}} \\
 &= 2^{-4/8} (ca + 2b + 6c + 6a + 20) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{4/8}} \\
 &= \frac{c(a + 6) + 2(b + 3a + 10)}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{4/8}} = \frac{c(a + 6) + 2(b + 3a + 10)}{a + b + c + 2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_3 &= \frac{2^{2(3-4)}}{d_5} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{j+2}{3} \binom{j+4}{j-1} d_{j+3} \right) \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-3)}{2 \cdot 4}} \\
 &= 2^{14/8-2} \left(1 \cdot 1 \cdot d_4 + \frac{4}{3} \cdot 6 \cdot d_5 \right) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{2/8}} \\
 &= 2^{-2/8} (c + a + 8) \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{2/8}} \\
 &= \frac{8 + a + c}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{2/8}} = \frac{8 + a + c}{(a + b + c + 2)^{1/2}}, \\
 B_4 &= \frac{2^{2(4-4)}}{d_5} \left(\sum_{j=1}^1 \frac{j+3}{4} \binom{j+6}{j-1} d_{j+4} \right) \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-4)}{2 \cdot 4}} \\
 &= \frac{4}{4} \binom{7}{0} d_5 = 1.
 \end{aligned}$$

Calculem ara els coeficients A_j . Per $n = 0$ tenim que $j = 0, 1, 2, 3$, per tant:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \binom{3}{0} \frac{2^{-7}}{d_5} \left(\frac{2^{2 \cdot 4 - 1} d_5}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-0)-1}{2 \cdot 4}} \\
 &= 12^{-7} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{7/8} = 2^{-7+49/8} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{7/8}} \\
 &= \frac{1}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{7/8}} = \frac{1}{((a + b + c + 2)^2)^{7/8}} \\
 &= \frac{1}{(a + b + c + 2)^{7/4}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \binom{4}{2} 2^{-5} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-1)-1}{2 \cdot 4}} = 6 \cdot 2^{-5} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{5/8} \\
 &= 6 \cdot 2^{-5+35/8} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{5/8}} = 6 \cdot 2^{-5/8} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{5/8}} \\
 &= \frac{6}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{5/8}} = \frac{6}{((a + b + c + 2)^2)^{5/8}} = \frac{6}{(a + b + c + 2)^{5/4}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \binom{5}{4} 2^{-3} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-2)-1}{2 \cdot 4}} = 5 \cdot 2^{-3} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{3/8} \\
 &= 2^{-3+21/8} \frac{5}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{3/8}} = 2^{-3/8} \frac{5}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{3/8}} \\
 &= \frac{5}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{3/8}} = \frac{5}{((a + b + c + 2)^2)^{3/8}} = \frac{5}{(a + b + c + 2)^{3/4}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \binom{6}{6} 2^{-1} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{\frac{2(4-3)-1}{2 \cdot 4}} = 2^{-1} \left(\frac{2^7}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5} \right)^{1/8} \\
 &= 2^{-1+7/8} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{1/8}} = 2^{-1/8} \frac{1}{(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)^{1/8}} \\
 &= \frac{1}{(2(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5))^{1/8}} = \frac{1}{((a + b + c + 2)^2)^{1/8}} = \frac{1}{(a + b + c + 2)^{1/4}}.
 \end{aligned}$$

Per $n = 1$ tenim que $j = 0, 1, 2$, on com abans només recalculem els nombres combinatoris:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \binom{2}{0} \frac{1}{(a + b + c + 2)^{7/4}} = \frac{1}{(a + b + c + 2)^{7/4}}, \\
 A_1 &= \binom{3}{2} \frac{1}{(a + b + c + 2)^{5/4}} = \frac{3}{(a + b + c + 2)^{5/4}},
 \end{aligned}$$

$$A_2 = \binom{4}{4} \frac{1}{(a+b+c+2)^{3/4}} = \frac{1}{(a+b+c+2)^{3/4}}.$$

Per $n = 2$ tenim que $j = 0, 1$:

$$A_0 = \binom{1}{0} \frac{1}{(a+b+c+2)^{7/4}} = \frac{1}{(a+b+c+2)^{7/4}},$$

$$A_1 = \binom{2}{2} \frac{1}{(a+b+c+2)^{5/4}} = \frac{1}{(a+b+c+2)^{5/4}}.$$

Finalment, per $n = 3$ tenim que $j = 0$, per tant:

$$A_0 = \binom{4-3-1-0}{2 \cdot 0} \frac{1}{(a+b+c+2)^{7/4}} = \frac{1}{(a+b+c+2)^{7/4}}.$$

Com podem veure, els coeficients A_0 són iguals per $n = 0, 1, 2, 3$ (per tant, també ho seran per $n = 4, 5, 6, 7$ per simetria) i, l' A_1 de $n = 2$ i de $n = 1$ només difereix en la constant 3 i, l' A_1 de $n = 2$ i de $n = 0$ només difereix en la constant 6, per tant, d'ara en endavant, reanomenem A_1 amb un 1 al numerador. El mateix farem amb el coeficient A_2 , donat que el de $n = 1$ i de $n = 0$ només difereix en la constant 5. Així doncs, substituint-ho a (4.4.11) obtenim:

$$\begin{aligned} I &= (d+g) \int_0^\infty \frac{dx}{\text{den}_{12}(x)} + (e+dc+ga+f) \int_0^\infty \frac{x^2}{\text{den}_{12}(x)} dx + (ec+f+db \\ &+ gb+e+fa) \int_0^\infty \frac{x^4}{\text{den}_{12}(x)} dx + (da+fc+eb+g+d+fb+ea+gc) \int_0^\infty \frac{x^6}{\text{den}_{12}(x)} dx \\ &= C_0 \int_0^\infty \frac{A_0 x^6 + 6A_1 x^4 + 5A_2 x^2 + A_3}{x^8 + B_1 x^6 + B_2 x^4 + B_3 x^2 + 1} dx + C_1 \int_0^\infty \frac{A_0 x^6 + 3A_1 x^4 + A_2 x^2}{x^8 + B_1 x^6 + B_2 x^4 + B_3 x^2 + 1} dx \\ &+ C_2 \int_0^\infty \frac{A_0 x^6 + A_1 x^4}{x^8 + B_1 x^6 + B_2 x^4 + B_3 x^2 + 1} dx + C_3 \int_0^\infty \frac{A_0 x^6}{x^8 + B_1 x^6 + B_2 x^4 + B_3 x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(C_0 + C_1 + C_2 + C_3)A_0 x^6 + (6C_0 + 3C_1 + C_2)A_1 x^4 + (5C_0 + C_1)A_2 x^2 + A_3 C_0}{x^8 + B_1 x^6 + B_2 x^4 + B_3 x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d_1 x^6 + e_1 x^4 + f_1 x^2 + g_1}{x^8 + a_1 x^6 + b_1 x^4 + c_1 x^2 + 1} dx, \end{aligned}$$

on hem usat la notació:

$$\begin{aligned} C_0 &= d + g, \\ C_1 &= e + dc + ga + f, \\ C_2 &= ec + f + db + gb + e + fa, \\ C_3 &= da + fc + eb + g + d + fb + ea + gc. \end{aligned}$$

Per tant, els paràmetres $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ i g_1 , venen donats per:

$$a_1 = B_1 = \frac{(a+c)(10+b) + 4(ac+2b+4)}{(a+b+c+2)^{3/2}},$$

$$b_1 = B_2 = \frac{c(a+6) + 2(b+3a+10)}{a+b+c+2},$$

$$c_1 = B_3 = \frac{8+a+c}{(a+b+c+2)^{1/2}},$$

$$d_1 = A_0(C_0 + C_1 + C_2 + C_3) = \frac{1}{(a+b+c+2)^{7/4}}$$

$$\times (a+b+c+2)(d+g+e+f) = \frac{d+g+e+f}{(a+b+c+2)^{3/4}},$$

$$e_1 = A_1(6C_0 + 3C_1 + C_2)$$

$$= \frac{4e + 4f + 6d + 6g + c(e+3d) + g(3a+b) + db + fa}{(a+b+c+2)^{5/4}},$$

$$f_1 = A_2(5C_0 + C_1) = \frac{g(a+5) + d(c+5) + e + f}{(a+b+c+2)^{3/4}},$$

$$g_1 = A_3C_0 = \frac{d+g}{(a+b+c+2)^{1/4}}.$$

■

4.5 Una aplicació: càlcul aproximat d'integrals

Veurem en aquesta secció com es poden calcular de manera aproximada certes integrals racionals. En particular, aplicarem iterativament els sistemes dinàmics obtinguts als casos de funcions racionals amb denominadors de grau 6 i 8 per arribar a una integral que, tot i ser similar a la donada i per tant de la mateixa dificultat, es pot calcular de manera efectiva.

4.5.1 Funcions racionals amb denominador de grau 6

Exemple 4.5.1. Considerem per exemple, la integral

$$\int_0^\infty \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx.$$

Usant el Teorema 4.4.2 iterativament, obtenim els següents resultats amb deu xifres significatives:

n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n
0	10	8	3	-1	24
1	3.297208191	3.257301140	3.528742902	17.150000000	9.946885046
2	3.001485673	3.001486131	7.321863016	13.91289768	6.588966668
3	3.000000046	3.000000045	6.954209737	13.90876371	6.954553797
4	2.999999999	3.000000000	6.954381760	13.90876349	6.954381739
5	3.000000000	3.000000000	6.954381748	13.90876350	6.954381750
6	3.000000000	3.000000000	6.954381750	13.90876350	6.954381750
7	3.000000000	3.000000000	6.954381750	13.90876350	6.954381750

Fixem-nos que per $n \geq 7$ la successió d'iterats es repeteix i arribem ja a un límit prou significatiu. A més a més, observem la següent relació entre els coeficients: $a_6 \simeq b_6$, $c_6 \simeq e_6$ i $d_6 \simeq 2c_6$, amb el qual ja en tenim prou per fer un càlcul aproximat de la integral, donat que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{3x^4 - x^2 + 24}{x^6 + 10x^4 + 8x^2 + 1} dx &\simeq \int_0^\infty \frac{6.954381750x^4 + 13.90876350x^2 + 6.954381750}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx \\
 &= 6.954381750 \int_0^\infty \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3} dx = 6.954381750 \int_0^\infty \frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^3} dx \\
 &= 6.954381750 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = 6.954381750 \frac{\pi}{2} \simeq 10.92391731.
 \end{aligned}$$

4.5.2 Funcions racionals amb denominador de grau 8

Exemple 4.5.2. Considerem la integral

$$\int_0^\infty \frac{7x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1}{x^8 + 2x^6 + 4x^4 + 6x^2 + 1} dx.$$

Podem aplicar ara, el Teorema 4.4.3, obtenint els següents resultats amb quinze xifres significatives:

n	a_n	b_n	c_n
0	2	4	6
1	3.970738451270305	6.285714285714286	4.276179870598790
2	3.994377620652548	5.990124663748497	3.995765471631257
3	4.000003036247671	6.000006102667838	4.000003066399218
4	3.999999999997672	5.999999999995345	3.999999999997672
5	4.000000000000000	6.000000000000000	4.000000000000000
6	4.000000000000000	6.000000000000000	4.000000000000000
7	4.000000000000000	6.000000000000000	4.000000000000000

n	d_n	e_n	f_n	g_n
0	7	-5	3	-1
1	0.552667548647906	5.465144770404375	9.395348327014394	3.101838923743023
2	2.258224917562334	6.270984654235129	5.831614109192580	1.812354838835979
3	2.023519255639489	6.082998082754376	6.095396838790391	2.035917875397362
4	2.029727845316540	6.089173869042307	6.089164202160723	2.029718178434955
5	2.029723011870201	6.089169035616446	6.089169035622287	2.029723011876043
6	2.029723011873122	6.089169035619366	6.089169035619366	2.029723011873122
7	2.029723011873122	6.089169035619366	6.089169035619366	2.029723011873122

Fixem-nos que per $n \geq 7$ la successió d'iterats es repeteix. A més, podem observar que $a_6 \simeq c_6$, $d_6 \simeq g_6$, $e_6 \simeq f_6$ i que $e_6 \simeq 3d_6$, amb el qual ja en tenim prou per fer un

càlcul aproximat de la integral, donat que:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{7x^6 - 5x^4 + 3x^2 - 1}{x^8 + 2x^6 + 4x^4 + 6x^2 + 1} dx \\
 & \simeq 2.029723011873122 \int_0^\infty \frac{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1} dx \\
 & = 2.029723011873122 \int_0^\infty \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 + 1)^4} dx \\
 & = 2.029723011873122 \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = 2.029723011873122 \frac{\pi}{2} \\
 & \simeq 3.188281451461374.
 \end{aligned}$$

Capítol 5

Dinàmica de l'aplicació de Boros i Moll

5.1 Introducció

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar la dinàmica associada a l'aplicació

$$G(a, b) := \left(\frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}}, \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} \right). \quad (5.1.1)$$

Com hem vist al Capítol anterior, aquesta aplicació apareix com a subsistema del sistema dinàmic associat a la transformació de Landen que s'aplica a una integral racional formada per polinomis amb termes parells, amb numerador de grau 4 i denominador de grau 6. En efecte, recordem que el Teorema 4.4.2 del capítol anterior garanteix que el sistema dinàmic discret definit per

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{5a_n + 5b_n + a_nb_n + 9}{(a_n + b_n + 2)^{4/3}}, \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n + 6}{(a_n + b_n + 2)^{2/3}}, \\ c_{n+1} = \frac{d_n + e_n + c_n}{(a_n + b_n + 2)^{2/3}}, \\ d_{n+1} = \frac{(b_n + 3)c_n + (a_n + 3)e_n + 2d_n}{a_n + b_n + 2}, \\ e_{n+1} = \frac{c_n + e_n}{(a_n + b_n + 2)^{1/3}}, \end{array} \right. \quad (5.1.2)$$

deixa invariant la integral

$$I(a, b, c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1} dx. \quad (5.1.3)$$

El sistema (5.1.2) va ser obtingut com a transformació de Landen associada a la integral (5.1.3) per G. Boros i V. Moll a [16] (vegeu també [17]). Observem que el sistema conté dos subsistemes desacoblats. Tal i com demostren M. Chamberland i V. Moll a [23] (vegeu també [16]) la convergència de la integral (5.1.3) està relacionada amb la dinàmica del subsistema definit per l'aplicació G definida a (5.1.1). A les referències [16, 23] trobem un primer estudi de la dinàmica global de l'aplicació G , i el retrat de fase d'una òrbita de G apareix a la portada del número 49 del Notices of the AMS que conté l'article [69], vegeu també la Figura 2. El nostre objectiu és aprofundir en l'estudi de la dinàmica global d'aquesta aplicació. Observem que, a diferència de la resta d'aplicacions al pla estudiades en aquesta tesi, no disposem d'una integral primera per a l'aplicació G .

Primerament, a la Secció 5.2, donarem una breu descripció de la dinàmica de l'aplicació G i de les diferents regions invariants que presenta. També veurem la relació entre la dinàmica de l'aplicació i la convergència de la integral (5.1.3).

A les següents seccions estudiarem alguns aspectes de la dinàmica de l'aplicació com ara l'existència de punts fixos i periòdics de període 2 i 3 (Secció 5.3). El nostre objectiu és provar l'existència de punts periòdics, però també ho és desenvolupar una metodologia que pugui ser aplicable a l'estudi dels punts periòdics d'altres sistemes dinàmics discrets. Aquesta metodologia consisteix en: convertir la caracterització dels punts periòdics en un problema algebraic; la combinació d'un algorisme basat en el mètode de Sturm per isolar totes les arrels reals d'un polinomi d'una variable i d'un procediment de descart de possibles solucions per a sistemes d'equacions polinòmiques; i en l'aplicació del Teorema de Poincaré-Miranda [67, 78]. Com veurem més endavant, l'existència de punts periòdics contradiu una conjectura sobre la dinàmica de G publicada a [71].

A la Secció 5.4 farem un estudi numèric-analític que mostrarà evidències de l'existència de comportaments homoclínics associats a un dels punts fixos de l'aplicació G , i de punts a la intersecció de la varietat inestable d'aquest punt fix i el conjunt de no-definició del semi-sistema dinàmic definit per G .

5.2 Dinàmica de l'aplicació G , convergència de la integral i Conjectura de Moll

A continuació resumim alguns resultats coneguts sobre la dinàmica de l'aplicació G i la seva relació amb la convergència de la integral (5.1.3), així com algunes de les qüestions obertes al voltant de la dinàmica global de l'aplicació.

Com veurem a la Secció 5.3.1, l'aplicació G té tres punts fixos. En particular el punt $P_1 = (3, 3)$, que és un super-atractor (els valors propis de la matriu jacobiana són nuls). A la referència [23] trobem el següent resultat que relaciona la convergència de la integral (5.1.3) amb la conca d'atracció d'aquest punt P_1 (vegeu també [16] per un resultat previ més feble).

Teorema 5.2.1 ([23]). *La conca d'atracció del punt fix $P_1 = (3, 3)$ del semi-sistema dinàmic discret generat per G , és la regió del pla (a, b) on la integral (5.1.3) convergeix.*

Observem que els valors $a = 3$ i $b = 3$, són els valors als quals acabaven convergint els paràmetres a_n i b_n a les integrals de l'Exemple 4.5.1 del capítol anterior.

Fixem-nos que la integral (5.1.3) estarà ben definida i serà convergent sempre i quan el seu denominador, el polinomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, no tingui arrels reals positives. Per estudiar la condició que han de complir a i b per tal que P tingui arrels múltiples, considerem

$$R(a, b) := \text{Res}(P, P'; x) = -a^2b^2 + 4a^3 + 4b^3 - 18ab + 27. \quad (5.2.1)$$

Observem que la corba $R(a, b) = 0$ ens indica el lloc geomètric del pla (a, b) on varia el tipus d'arrels de P . Aquesta corba és coneguda a la literatura com a *corba resolvent*, i és invariant per l'aplicació G , ja que satisfà la relació:

$$R(G(a, b)) = \frac{(a - b)^2}{(a + b + 2)^4} R(a, b). \quad (5.2.2)$$

Així mateix, la corba està formada per dues components connexes L_1 i L_2 (vegeu la Figura 1). Notem que el punt fix $P_1 = (3, 3)$ referenciat al Teorema 5.2.1, és una *cúspide* de la component L_1 .

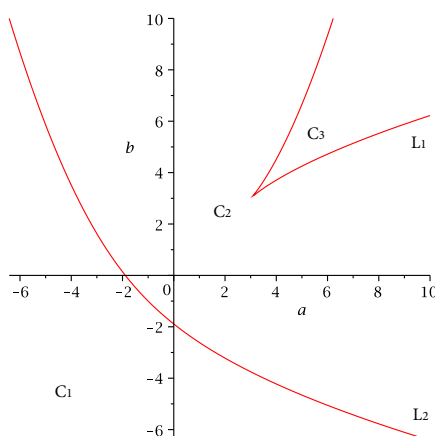


Figura 1. Components connexes L_1 i L_2 de la corba $R(a, b) = 0$, i regions C_1 , C_2 i C_3 del pla.

La corba resolvent defineix tres regions al pla que es mostren a la Figura 1. Si estudiem amb detall aquestes regions podem veure que:

- (a) Sobre $L_1 \cup C_2 \cup C_3$, el polinomi del denominador té les seves arrels complexes, per tant, la integral (5.1.1) és convergent.
- (b) Sobre $C_1 \cup L_2$ en canvi, hi trobem com a mínim, una arrel positiva. Per tant, en aquesta regió, la integral serà divergent.

Per tant, usant el Teorema 5.2.1, obtenim que la conca d'atracció del punt fix $P_1 = (3, 3)$ és $L_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Sobre la component L_2 de la corba $R(a, b) = 0$, la dinàmica és senzilla. Aquesta component és *positivament* invariant. Només és positivament invariant perquè, com veurem tot seguit, hi ha punts de L_2 que són imatges de punts de C_1 (per exemple, els que pertanyen al conjunt definit per (5.2.3)). Així mateix, tota òrbita amb condicions inicials sobre la corba $L_2 \setminus \{(-1, -1)\}$ convergeix al punt fix P_2 descrit a la Proposició 5.3.2, situat sobre L_2 (aquest resultat es demostra a la Secció 5.4).

En resum, la dinàmica de G sobre els conjunts invariants $\mathcal{A} := L_1 \cup C_2 \cup C_3$ i L_2 és coneguda. L'objectiu és, doncs, aprofundir en l'estudi de la dinàmica de G sobre el conjunt

$$\mathcal{B} := C_1 \setminus \mathcal{F},$$

on

$$\mathcal{F} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ pels quals existeix } n \geq 0 \text{ tal que } G^n(a, b) \in \Gamma\},$$

amb $\Gamma := \{a+b+2=0\}$, és l'anomenat conjunt de no-definició de G . L'any 2012, V. Moll va establir la següent conjectura sobre la dinàmica de G : “*L'òrbita de tot punt per sota de la corba resolvent és densa en una regió oberta sota d'aquesta corba*” ([71, Conjectura 15.6.3, pàgina 442]). Excloent un tercer punt fix P_3 que es troba per sota la corba resolvent (punt, de fet, conegut per l'autor, vegeu [23]) i els punts del conjunt de no-definició \mathcal{F} , provarem l'existència de punts 3-periòdics que demostrin que la conjectura no és certa (vegeu el Teorema 5.3.1 i la Proposició 5.3.7). Observem també que l'Equació (5.2.2) implica que qualsevol condició inicial sobre la recta $R_1 := \{a - b = 0\}$ es projecta per G sobre la corba resolvent, és a dir, $G(a, a) \in \{R(a, b) = 0\}$ per tot $a \neq -1$. En particular, veurem que el conjunt de condicions inicials a

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ pels quals existeix } n \geq 0 \text{ tal que } G^n(a, b) \in R_1\} \cap \{C_1 \setminus \mathcal{F}\} \quad (5.2.3)$$

no verifiquen la conjectura, ja que el seu ω -límit és el punt P_2 mencionat anteriorment (vegeu la Proposició 5.4.1).

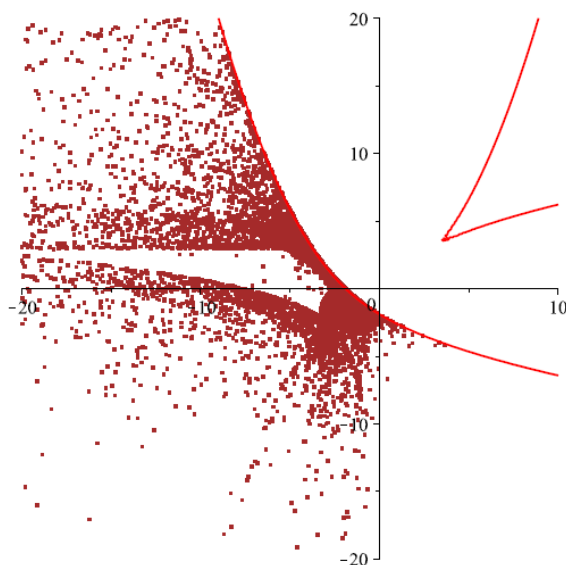


Figura 2. 10000 iterats d'una òrbita situada per sota de la corba resolvent.

A la Secció 5.4 farem un estudi numèric-analític que mostrarà evidències de l'existència de comportaments homoclínic associats al punt P_2 , és a dir, de punts sobre la varietat inestable de P_2 que també pertanyen a la varietat estable. L'existència d'aquests punts també contradiria l'esmentada conjectura. Finalment, també donarem evidències numèriques de punts que es troben a la intersecció de la varietat inestable de P_2 i el conjunt de no-definició.

5.3 Punts fixos i periòdics

En aquesta secció es demostra el següent resultat:

Teorema 5.3.1. *Per l'aplicació G es satisfà:*

- (a) *Existeixen tres punts fixos. Un super-atractor a $\mathcal{A} \cap L_1$, una sella oscil·lant a L_2 i un focus repulsor a C_1 .*
- (b) *No existeixen punts periòdics de període mínim 2.*
- (c) *Existeixen dotze punts periòdics de període mínim 3, que corresponen a quatre òrbites periòdiques de període mínim 3.*

La demostració de l'anterior resultat es segueix de les Proposicions 5.3.2, 5.3.6 i 5.3.7, que es troben a les següents seccions i que contenen l'expressió dels punts fixos i la localització dels punts 3-periòdics.

5.3.1 Estudi dels punts fixos

Proposició 5.3.2. *L'aplicació G té únicament els següents tres punts fixos:*

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (3, 3), \\
 P_2 &= \left(\frac{-43+3\sqrt{177}}{384} A^{2/3} - \frac{1}{6} A^{1/3} - \frac{8}{3}, \frac{13-\sqrt{177}}{48} A^{2/3} + \frac{7+\sqrt{177}}{48} A^{1/3} + \frac{4}{3} \right) \\
 &\simeq (-4.205569430401, 3.957741209285), \\
 P_3 &= \left(\frac{-21+\sqrt{249}}{96} B^{2/3} + \frac{15-\sqrt{249}}{12} B^{1/3} - 2, \frac{17-\sqrt{249}}{48} B^{2/3} + \frac{-13+\sqrt{249}}{24} B^{1/3} - \frac{4}{3} \right) \\
 &\simeq (-5.309144450217, 0.831177207208).
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

on $A := 172 + 12\sqrt{177}$ i $B := 188 + 12\sqrt{249}$. Els punts, són respectivament un super-atractor, una sella oscil·lant i un focus repulsor.

Demostració. Considerem l'aplicació G , donada a (5.1.1), i busquem els punts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $G(a, b) = (a, b)$, és a dir

$$\frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}} = a \quad \text{i} \quad \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} = b.$$

Per tal de facilitar les operacions introduïm una variable auxiliar m , la qual haurà de complir la relació $m^3 = a + b + 2$. Amb aquesta nova variable, les noves equacions són:

$$\begin{aligned}
 d_1(a, b, m) &:= m^3 - a - b - 2 = 0, \\
 d_2(a, b, m) &:= -am^4 + ab + 5a + 5b + 9 = 0, \\
 d_3(a, b, m) &:= -bm^2 + a + b + 6 = 0.
 \end{aligned}$$

Resolem primer el sistema format per la primera i tercera equació, en funció d' a i b :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m^5 - m^3 - 2m^2 - 4}{m^2}, \\
 b &= \frac{m^3 + 4}{m^2}.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Substituïm el resultat obtingut a la condició $d_2(a, b, m)$, tot obtenint una nova relació

$$\begin{aligned}
 d_4(m) &= -m^{11} + m^9 + 3m^8 + 5m^7 + 3m^6 + 2m^5 - m^4 - 8m^3 - 8m^2 - 16 \\
 &= -(m - 2)(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 2)(m^3 + m^2 - m - 2) \\
 &\quad \times (m^3 + m^2 + m + 2) = 0.
 \end{aligned}$$

Com veiem, d_4 factoritza en cinc termes, alguns dels quals es poden resoldre algebraicament. Buscant les arrels reals d'aquests factors i buscant el nombre d'arrels reals dels altres amb la instrucció `realroot` del programari Maple v.17 (es pot fer també mitjançant un algorisme basat en el mètode de Sturm, vegeu [59, §40 i §41] i també [88]), obtenim que les úniques solucions reals de l'equació anterior són:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2, \\ m_2 &= \frac{1}{6} \sqrt[3]{A} + \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{A}} - \frac{1}{3} \simeq 1.205569430401, \\ m_3 &= -\frac{1}{6} \sqrt[3]{B} + \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{B}} - \frac{1}{3} \simeq -1.353209964199, \end{aligned}$$

on $A := 172 + 12\sqrt{177}$ i $B := 188 + 12\sqrt{249}$. Substituint aquests valors a les expressions d' a i b a (5.3.2) obtenim els punts descrits a l'Equació (5.3.1).

A continuació estudiem el caràcter dels punts fixos. Per això, considerem la matriu diferencial de l'aplicació $G(a, b)$

$$DG(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{-ab + 3b^2 + b - 5a - 6}{3(a+b+2)^{7/3}} & \frac{3a^2 - ab + a - 5b - 6}{3(a+b+2)^{7/3}} \\ \frac{a - 6 + b}{3(a+b+2)^{5/3}} & \frac{a - 6 + b}{3(a+b+2)^{5/3}} \end{pmatrix}.$$

Els polinomis característics i els valors propis associats en cada cas, vénen donats pels resultats següents:

- Pel punt P_1 , el polinomi característic és $p_1(\lambda) = \lambda^2$, amb valors propis $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Per tant, P_1 és un super-atractor.
- Pel punt P_2 , el polinomi característic és

$$\begin{aligned} p_2(\lambda) &= \frac{1}{442368} \left((\sqrt{177} - 25) A^{2/3} + (8\sqrt{177} - 136) A^{1/3} + 1280 + 1152\lambda \right) \\ &\quad \times \left((7\sqrt{177} - 111) A^{2/3} + (8\sqrt{177} - 264) A^{1/3} - 768 + 384\lambda \right), \end{aligned}$$

amb valors propis

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1}{384} \left((7\sqrt{177} - 111) A^{2/3} + (8\sqrt{177} - 264) A^{1/3} - 768 \right) \\ &\simeq 7.070105942718, \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{1152} \left((\sqrt{177} - 25) A^{2/3} + (8\sqrt{177} - 136) A^{1/3} + 1280 \right) \\ &\simeq -0.447010972694. \end{aligned}$$

És a dir, un valor propi positiu amb mòdul més gran que 1 i un altre de negatiu amb mòdul més petit que 1. Per tant, P_2 és una sella oscil·lant.

- Finalment, pel punt P_3 , el polinomi característic és

$$p_3(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{10}{9} + \frac{17 - \sqrt{249}}{36} B^{1/3} + \frac{13 - \sqrt{249}}{144} B^{2/3} \right) \lambda + \frac{10}{9} + \frac{25 - \sqrt{249}}{72} B^{1/3} + \frac{107 - 7\sqrt{249}}{288} B^{2/3},$$

amb valors propis

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{\sqrt{249} - 13}{288} B^{2/3} + \frac{\sqrt{249} - 17}{72} B^{1/3} - \frac{5}{9} \\ &\pm \frac{1}{288} i \left[\left(-418 + 26\sqrt{249} \right) B^{4/3} + \left(18048 - 1152\sqrt{249} \right) B^{2/3} \right. \\ &\quad \left. + \left(128\sqrt{249} + 7040 \right) B^{1/3} + 76800 \right]^{1/2} \\ &\simeq -0.174010918997 \pm 1.174395345926i, \end{aligned}$$

Es a dir, complexos conjugats amb mòdul més gran que 1. Per tant, P_3 és un focus repulsor.

■

5.3.2 Una metodologia general per a la determinació de punts periòdics

Per estudiar la no-existència de punts de període mínim 2 i l'existència de punts de període mínim 3, hem desenvolupat una metodologia general per abordar l'estudi de l'existència de punts periòdics en un sistema dinàmic discret donat per una aplicació $F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, el qual exposem en aquesta secció.

El conjunt de punts p -periòdics d'una aplicació F ve donat pel sistema d'equacions que determina la identitat $F^p = \text{Id}$. Suposem que podem transformar aquesta condició en un sistema de k equacions *polinòmiques* a coeficients racionals donat per:

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) = 0, \\ f_2(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ f_k(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

on $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $k \geq n$. Suposem també que mitjançant un seguit de transformacions elementals, arribem a un sistema polinòmic desacoblat *que conté* aquestes solucions,

de la forma:

$$\begin{cases} q_1(x_1) = 0, \\ q_2(x_2) = 0, \\ \vdots \\ q_n(x_n) = 0. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Aquesta és una situació que pot aparèixer, per exemple, quan apliquem la tècnica de les resultants. En aquest cas la metodologia seguiria els passos següents:

Pas 1: Observem que les solucions d'aquest sistema es poden obtenir resolent separatament cadascuna de les equacions que el componen. Quan això no és efectivament possible (per l'elevat grau dels polinomis q_j , o per d'altres raons), mitjançant un algorisme basat en el mètode de Sturm ([59, 88]) per cada polinomi q_j , sempre és possible trobar intervals *de longitud màxima prefixada* i *extrems racionals* tals que cadascun dels intervals conté una única arrel real del polinomi q_j^*

Procedint d'aquesta manera obtenim que el conjunt de solucions del sistema (5.3.3) està contingut en el conjunt de caixes (ortoedres n -dimensionals) amb vèrtexs de coordenades racionals de la forma

$$\mathcal{I} = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n := [x_{i,1}, x_{s,1}] \times [x_{i,2}, x_{s,2}] \times \cdots \times [x_{i,n}, x_{s,n}] \subset \mathbb{R}^n, \quad (5.3.5)$$

on cada interval I_j conté una única arrel del polinomi q_j .

Pas 2: Per descartar aquelles caixes que no contenen cap solució del sistema (5.3.3) aplicarem un procediment de descart a cada caixa de la forma (5.3.5). Aquest procediment s'inspira en una tècnica usada a [45] i que es basa en les següents observacions.

Suposem que volem descartar que un cert polinomi $f(\mathbf{x})$ no té cap zero a una certa caixa de la forma (5.3.5). Aleshores:

- Si creiem que $f(\mathbf{x}) > 0$ per tot $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$, aleshores buscarem un nombre L tal que $0 < L < f(\mathbf{x})$. En el nostre cas, com que la funció $f(\mathbf{x})$ és un polinomi $f(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} M_{\ell}(\mathbf{x})$ on $M_{\ell}(\mathbf{x}) = a_{\ell} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n}$, si volem minorar $f(\mathbf{x})$, ho farem per cadascun dels monomis que formen $f(\mathbf{x})$, és a dir, per cada monomi $M_{\ell}(\mathbf{x})$ trobarem un nombre $M_{i_{\ell}}$ tal que $M_{i_{\ell}} < M_{\ell}(\mathbf{x})$ per tot $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$. Per tant, si es compleix

$$0 < L := \sum_{\ell} M_{i_{\ell}} < \sum_{\ell} M_{\ell}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (5.3.6)$$

podem descartar la caixa \mathcal{I} .

*Aquests intervals també es poden obtenir amb la instrucció `realroot` del programari Maple v.17.

- Si creiem que $f(\mathbf{x}) < 0$ per tot $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$, aleshores buscarem un nombre U tal que $f(\mathbf{x}) < U < 0$. A tal efecte, per cada monomi $M_\ell(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{x})$, trobarem un nombre M_{s_ℓ} tal que $M_\ell(\mathbf{x}) < M_{s_\ell}$ per tot $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$. Així doncs, si es compleix

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} M_\ell(\mathbf{x}) < \sum_{\ell} M_{s_\ell} =: U < 0, \quad (5.3.7)$$

podem descartar la caixa \mathcal{I} .

Farem el càlcul dels monomis minorants o majorants, M_{i_ℓ} i M_{s_ℓ} , emprant el següent resultat, la demostració del qual és evident, i que es pot automatitzar implementant-ho en un programari de càlcul simbòlic.

Lema 5.3.3. *Considerem un cert monomi $M(\mathbf{x}) = a x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n}$ i la caixa*

$$\mathcal{I} = [x_{i,1}, x_{s,1}] \times [x_{i,2}, x_{s,2}] \times \cdots \times [x_{i,n}, x_{s,n}] \subset O^+ \subset \mathbb{R}^n,$$

on $O^+ = \{(x_1, \dots, x_n), \text{ tal que } x_i > 0 \text{ per tot } i = 1, \dots, n\}$. Aleshores, per tot $\mathbf{x} \in \mathcal{I}$ s'obté $M_i \leq M(\mathbf{x}) \leq M_s$, on

$$(a) \quad M_i = a x_{i,1}^{\ell_1} x_{i,2}^{\ell_2} \cdots x_{i,n}^{\ell_n} \text{ i } M_s = a x_{s,1}^{\ell_1} x_{s,2}^{\ell_2} \cdots x_{s,n}^{\ell_n} \text{ si } a > 0.$$

$$(b) \quad M_i = a x_{s,1}^{\ell_1} x_{s,2}^{\ell_2} \cdots x_{s,n}^{\ell_n} \text{ i } M_s = a x_{i,1}^{\ell_1} x_{i,2}^{\ell_2} \cdots x_{i,n}^{\ell_n} \text{ si } a < 0.$$

Observació 5.3.4. Observem que en el cas que la caixa \mathcal{I} no estigui continguda a la regió $O^+ \subset \mathbb{R}^n$ sempre podem considerar un valor $\xi > 0$, $\xi \in \mathbb{Q}$ tal que la nova caixa

$$\tilde{\mathcal{I}} = [x_{i,1} + \xi, x_{s,1} + \xi] \times [x_{i,2} + \xi, x_{s,2} + \xi] \times \cdots \times [x_{i,n} + \xi, x_{s,n} + \xi] \subset O^+,$$

i aplicar, aleshores, el procediment de descart sobre el polinomi

$$f(x_1 - \xi, x_2 - \xi, \dots, x_n - \xi).$$

Així doncs, el procediment de descart que seguirem és el següent: considerem totes les caixes de la forma (5.3.5) (si és necessari, prèviament haurem aplicat la transformació indicada a l'observació anterior per un valor ξ adequat a totes les caixes). Per cada caixa calcularem el signe de la funció f_1 al punt mig de la caixa i segons aquest signe minorem o majorom cada monomi de f_1 usant les fórmules del Lema 5.3.3. Si es compleix alguna de les condicions (5.3.6) o (5.3.7), descartem la caixa. En cas contrari afegim la caixa a la llista de caixes no descartades.

Si considerem que la llista de caixes no descartades no està prou optimitzada, aplicarem el procediment de descart al polinomi f_2 sobre el conjunt de caixes no descartades i així successivament, si fos necessari, fins a fer servir el polinomi f_n .

En acabar aquest procés, i si encara considerem que la llista de caixes no descartades no està prou optimitzada, podem tornar a efectuar els passos anteriors, calculant una llista d'interval·ls que continguin una única arrel de cada polinomi q_j de longitud menor.

Pas 3: Un cop assolit un llistat prou optimitzat de caixes no descartades, identificarem aquelles que corresponen a punts fixos o òrbites de període un divisor de p , i també les descartarem.

Pas 4: Un cop assolit un llistat prou optimitzat de caixes, intentarem demostrar que realment cada caixa conté una solució tot aplicant el Teorema de Poincaré-Miranda. La unicitat de la solució a cada caixa ve donada pel fet que els interval·ls I_j contindran només una única solució de cada polinomi q_j .

Teorema 5.3.5 (Poincaré-Miranda). *Sigui $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } |x_i| < L, \text{ per } 1 \leq i \leq n\}$ i suposem que l'aplicació $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua a la clausura de Ω , $\overline{\Omega}$. Suposem que $F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per tot $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ i que*

$$(i) \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

$$(ii) \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Aleshores existeix $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Aquest resultat va ser enunciat per H. Poincaré el 1883 i el 1884 ([78, 79]) i demostrat posteriorment per ell mateix el 1886 ([80]). El 1940, C. Miranda ([67]) el va re-obtenir com a formulació equivalent del Teorema del punt fix de Brouwer. Demostracions recents del teorema es presenten a [58] i [90]. Vegeu també l'Apèndix 6.C. A la demostració de la Proposició 5.3.7 farem servir una versió del Teorema 5.3.5 convenientment adaptada a ortoedres n -dimensionals generals. És obvi que donada una funció contínua a \mathbb{R}^n , si trobem un ortoedre n -dimensional tal que per cada component de la funció hi ha un parell de cares oposades (diferents per cada component), en les que el signe de la component sigui diferent, mitjançant un canvi afí i, si convé, un canvi de signe a les components de la funció, sempre ens podem reduir a les hipòtesis del Teorema 5.3.5.

5.3.3 Estudi dels punts 2-periòdics

Proposició 5.3.6. *L'aplicació G no té punts periòdics de període mínim 2.*

Demostració. Considerem l'aplicació donada a (5.1.1) i busquem els punts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $G(G(a, b)) = (a, b)$. Ho farem en dos passos, és a dir, considerem c i d tals que $G(a, b) = (c, d)$ i $G(c, d) = (a, b)$, de manera que ens quedaran les igualtats següents:

$$\begin{aligned} \frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}} = c & \quad \text{i} \quad \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} = d, \\ \frac{5c + 5d + cd + 9}{(c + d + 2)^{4/3}} = a & \quad \text{i} \quad \frac{c + d + 6}{(c + d + 2)^{2/3}} = b. \end{aligned}$$

Per tal de facilitar les operacions introduïm dues variables auxiliars, m i n , les quals hauran de complir les relacions $m^3 = a + b + 2$ i $n^3 = c + d + 2$. Fent servir aquesta notació, les noves equacions a resoldre són:

$$\begin{aligned} d_1(a, b, c, d, m, n) &:= m^3 - a - b - 2 = 0, \\ d_2(a, b, c, d, m, n) &:= n^3 - c - d - 2 = 0, \\ d_3(a, b, c, d, m, n) &:= -cm^4 + ab + 5a + 5b + 9 = 0, \\ d_4(a, b, c, d, m, n) &:= -dm^2 + a + b + 6 = 0, \\ d_5(a, b, c, d, m, n) &:= -an^4 + cd + 5c + 5d + 9 = 0, \\ d_6(a, b, c, d, m, n) &:= -bn^2 + c + d + 6 = 0. \end{aligned}$$

El nostre objectiu és trobar els valors d' a , b , c , d , m i n que verifiquen les sis condicions. Resolem primer el sistema format per les equacions $d_1(a, b, c, d, m, n) = 0$, $d_2(a, b, c, d, m, n) = 0$, $d_4(a, b, c, d, m, n) = 0$ i $d_6(a, b, c, d, m, n) = 0$ en funció d' a , b , c i d , obtenint:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m^3 n^2 - n^3 - 2n^2 - 4}{n^2}, \\ b &= \frac{n^3 + 4}{n^2}, \\ c &= \frac{m^2 n^3 - m^3 - 2m^2 - 4}{m^2}, \\ d &= \frac{m^3 + 4}{m^2}. \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Substituint el resultat obtingut a les condicions $d_3(a, b, c, d, m, n)$ i $d_5(a, b, c, d, m, n)$ obtenim unes noves equacions:

$$\begin{cases} d_7(m, n) = -m^4 n^7 + m^5 n^4 + 2m^4 n^4 + m^3 n^5 + 5m^3 n^4 + 4m^2 n^4 - n^6 \\ \quad + 4m^3 n^2 - 2n^5 - n^4 - 8n^3 - 8n^2 - 16 = 0, \\ d_8(m, n) = -m^7 n^4 + m^4 n^5 + m^5 n^3 + 2m^4 n^4 + 5m^4 n^3 - m^6 \\ \quad + 4m^4 n^2 - 2m^5 + 4m^2 n^3 - m^4 - 8m^3 - 8m^2 - 16 = 0. \end{cases} \tag{5.3.9}$$

Com a conseqüència del fet que $d_8(m, n) = d_7(n, m)$, obtenim que si $n = n_0$ és una arrel de $d_9(n) = \text{Res}(d_7(m, n), d_8(m, n); m)$, aleshores també ho és $m = n_0$ del polinomi $d_{10}(m) = \text{Res}(d_7(m, n), d_8(m, n); n)$ i recíprocament (de fet, un càlcul mostra que $d_9(n) = -d_{10}(n)$). Així doncs tota solució real del sistema (5.3.9) està continguda (de forma isolada) en algun rectangle de la forma

$$\mathcal{I}_{i,j} = I_i \times I_j \subset \mathbb{R}^2 \tag{5.3.10}$$

on $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ i I_1, I_2, I_3 i I_4 són quatre intervals disjunts que contenen les quatre úniques arrels reals diferents i no nul·les ($n = 0$ no correspon a cap punt 2-periòdic de G) del polinomi

$$\begin{aligned} d_9(n) = & \text{Res}(d_7(m, n), d_8(m, n); m) \\ & - n^4 (n - 2) (n^2 + n + 2) (n^2 + 2n + 4) (n^3 + n^2 + n + 2) (n^4 + n^3 + 5n^2 + 8n + 4) \\ & \times (n^{12} + n^{11} + 3n^{10} + 8n^9 + 14n^8 - 6n^7 + 37n^6 - 11n^5 + 47n^4 - 50n^3 \\ & + 56n^2 - 24n + 16) \\ & \times (n^{16} + 9n^{15} + 34n^{14} + 90n^{13} + 204n^{12} + 333n^{11} + 435n^{10} + 545n^9 + 537n^8 \\ & + 411n^7 + 419n^6 + 254n^5 + 380n^4 - 32n^3 + 272n^2 - 32n + 64) \\ & \times (n^{16} + 2n^{15} + 9n^{14} + 34n^{13} + 5n^{12} + 84n^{11} + 173n^{10} - 80n^9 + 497n^8 \\ & - 404n^7 + 829n^6 - 670n^5 + 588n^4 - 496n^3 + 304n^2 - 96n + 64) \\ & \times (n^3 + n^2 - n - 2) (n + 1)^2 (n^2 - n + 1)^2. \end{aligned}$$

Utilitzem ara el procediment explicat a la Secció 5.3.2.

Pas 1: Aplicant la instrucció `realroot` de Maple v.17 al polinomi d_9 obtenim que hi ha 5 arrels reals d'aquest polinomi donades per: les solucions exactes $n = 0$ (que descartem), $n = -1$, $n = 2$ i per dues altres solucions contingudes als intervals de longitud acotada per 10^{-21}

$$I_1 = \left[-\frac{399397086201257638833}{295147905179352825856}, -\frac{1597588344805030555331}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_2 = \left[\frac{177910645965499912685}{147573952589676412928}, \frac{1423285167723999301481}{1180591620717411303424} \right];$$

als que afegim els intervals degenerats $I_3 = [-1, -1]$ i $I_4 = [2, 2]$.

Pas 2: A continuació apliquem el procediment de descart explicat a la Secció 5.3.2 a la col·lecció de 16 rectangles (4×4) $I_{i,j}$ de la forma (5.3.10) on els intervals són els calculats anteriorment (farem un abús de llenguatge i anomenarem també rectangles als casos degenerats formats a partir dels intervals I_3 i I_4). De fet, hem aplicat el procediment de descart a les caixes obtingudes en aplicar la translació indicada a l'Observació 5.3.4, amb $\xi = 2$, sobre el polinomi $f(m, n) = d_7(m - \xi, n - \xi)$. Com a resultat, obtenim que qualsevol solució del sistema (5.3.9) ha d'estar continguda a alguna de les següents 3 caixes no descartades: $\mathcal{I}_{1,1}$, $\mathcal{I}_{2,2}$ i $\mathcal{I}_{4,4}^\dagger$.

[†]A la secció 5.3.5 donem els codis del procediment de descart que hem aplicat a la demostració de la Proposició 5.3.7, per estudiar l'existència de punts 3-periòdics. Com que treballem amb una variable menys, en aquest punt hem fet servir una adaptació d'aquests codis.

Pas 3: Finalment, observem que les caixes $\mathcal{I}_{1,1}$, $\mathcal{I}_{2,2}$ i $\mathcal{I}_{4,4}$, corresponen als punts fixos de G (descrits a (5.3.1)), i per tant també les descartarem.

En efecte, el punt fix P_1 es correspon amb $(m, n) = (2, 2)$ per tant amb la solució del sistema (5.3.9) que pertany a $I_{4,4}$.

Pel punt fix P_2 , l'única solució real que verifica l'equació $m^3 = a + b + 2$ ve donada per l'expressió

$$m = -\frac{1}{128} A^{2/3} \sqrt{177} + \frac{43}{384} A^{2/3} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{A} - \frac{1}{3} \simeq 1.20556943, \quad (5.3.11)$$

on $A = 172 + 12\sqrt{177}$. Tenint en compte que en aquest cas, $(a, b) = (c, d)$, obtenim $m = n$. Per tant, podem comprovar que P_2 es correspon amb una solució (m, n) del sistema (5.3.9) que pertany a la caixa $I_{2,2}$.

Anàlogament, veiem que pel punt P_3 , l'única solució real que verifica l'equació $m^3 = a + b + 2$ ve donada per l'expressió

$$m = \frac{1}{32} B^{2/3} \sqrt{249} - \frac{47}{96} B^{2/3} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{B} - \frac{1}{3} \simeq -1.35320996, \quad (5.3.12)$$

on $B = 188 + 12\sqrt{249}$. Com abans, sabem que $m = n$ i consegüentment podem comprovar que P_3 es correspon amb una solució del sistema (5.3.9) continguda a la caixa $I_{1,1}$. Descartem, doncs, aquesta caixa també.

En conseqüència, no hi ha punts de període mínim 2 ■

En una primera aproximació, prèvia al desenvolupament de la metodologia explicada a la Secció 5.3.2 i a la demostració anterior, vam fer servir una metodologia més convencional basada en l'ús de *bases de Gröbner* (veure Apèndix 6.D) per a estudiar el sistema d'equacions (5.3.9). Hem decidit incloure, també, la següent demostració alternativa de la Proposició 5.3.6 per posar de manifest les diverses tècniques que hem desenvolupat durant el període d'obtenció dels resultats aquí exposats.

Demostració alternativa de la Proposició 5.3.6. Per estudiar les solucions del sistema (5.3.9) usarem el mètode de les *bases de Gröbner*. Aquest mètode ens permet obtenir un conjunt de polinomis, que generen la mateixa varietat que $d_7(m, n)$ i $d_8(m, n)$, però tals que és més fàcil obtenir els seus zeros comuns, els quals coincideixen amb els del sistema (5.3.9).

Considerem l'ideal $F = \langle d_7(m, n), d_8(m, n) \rangle$. Busquem una base de Gröbner a partir d'aquests polinomis, tot usant la instrucció **Groebner[Basis]** del programari Maple v.17 amb un ordre lexicogràfic pur considerant $m > n$, i obtenim tres polinomis $g_1(n)$, $g_2(m, n)$ i $g_3(m, n)$, dels quals el primer no depèn de la variable m . La seva expressió ve donada pel producte següent:

$$\begin{aligned} g_1(n) = & g_{1,1}(n) \cdot g_{1,2}(n) \cdot g_{1,3}(n) \cdot g_{1,4}(n) \cdot g_{1,5}(n) \cdot g_{1,6}(n) \cdot g_{1,7}(n) \cdot g_{1,8}(n) \\ & \times g_{1,9}(n) \cdot g_{1,10}(n) \cdot g_{1,11}(n), \end{aligned}$$

on els factors $g_{1,i}(n)$ per $i \in \{1, \dots, 11\}$ vénen donats per:

$$\begin{aligned}
 g_{1,1}(n) &= n - 2, \\
 g_{1,2}(n) &= n + 1, \\
 g_{1,3}(n) &= n^2 - n + 1, \\
 g_{1,4}(n) &= n^2 + n + 2, \\
 g_{1,5}(n) &= n^2 + 2n + 4, \\
 g_{1,6}(n) &= n^3 + n^2 + n + 2, \\
 g_{1,7}(n) &= n^4 + n^3 + 5n^2 + 8n + 4, \\
 g_{1,8}(n) &= n^{12} + n^{11} + 3n^{10} + 8n^9 + 14n^8 \\
 &\quad - 6n^7 + 37n^6 - 11n^5 + 47n^4 - 50n^3 + 56n^2 - 24n + 16, \\
 g_{1,9}(n) &= n^{16} + 9n^{15} + 34n^{14} + 90n^{13} + 204n^{12} + 333n^{11} + 435n^{10} \\
 &\quad + 545n^9 + 537n^8 + 411n^7 + 419n^6 + 254n^5 + 380n^4 - 32n^3 \\
 &\quad + 272n^2 - 32n + 64, \\
 g_{1,10}(n) &= n^3 + n^2 - n - 2, \\
 g_{1,11}(n) &= n^{16} + 2n^{15} + 9n^{14} + 34n^{13} + 5n^{12} + 84n^{11} + 173n^{10} - 80n^9 \\
 &\quad + 497n^8 - 404n^7 + 829n^6 - 670n^5 + 588n^4 - 496n^3 + 304n^2 \\
 &\quad - 96n + 64.
 \end{aligned}$$

Aquest polinomi té grau 62 respecte la variable n i la seva factorització ens permetrà trobar els zeros reals resolent aquells factors que ho permetin i, fent servir la instrucció **realroot** determinarem el nombre d'arrels reals dels altres factors. No explicitem les expressions dels polinomis $g_2(m, n)$ i $g_3(m, n)$ per la seva longitud i perquè la seva factorització no és tant senzilla com la de $g_1(n)$. Val a dir però, que el $\text{grau}_m(g_2(m, n)) = 1$, el $\text{grau}_n(g_2(m, n)) = 61$, el $\text{grau}_m(g_3(m, n)) = 2$, i el $\text{grau}_n(g_3(m, n)) = 61$.

Busquem, doncs, els zeros reals del polinomi $g_1(n)$ i trobem només les següents solucions reals per la variable n (on recordem que $A := 172 + 12\sqrt{177}$ i $B := 188 + 12\sqrt{249}$):

$$\begin{aligned}
 n_1 &= 2, \\
 n_2 &= -1, \\
 n_3 &= -\frac{1}{6} (B^{1/3} - 8B^{-1/3} + 2) \simeq -1.353209964199, \\
 n_4 &= \frac{1}{6} (A^{1/3} + 16A^{-1/3} - 2) \simeq 1.205569430401.
 \end{aligned}$$

Aquests valors surten de resoldre exactament els factors $g_{1,1}(n), g_{1,2}(n), g_{1,6}(n)$ i $g_{1,10}(n)$ respectivament.

Substituint cadascun dels valors n_i al polinomi $g_2(m, n)$ trobem les corresponents solucions per a la variable m , que anomenem m_i . En el nostre cas només hi ha tres solucions reals $m_1 = 2$, $m_3 = n_3$ i $m_4 = n_4$; recordem que el polinomi g_2 és lineal respecte de la variable m i que per tant el càlcul dels valors m_i a partir dels valors n_i és directe.

Notem també, que no obtenim cap solució real m_2 , per n_2 . En efecte, quan substituïm el valor de n_2 a $g_2(m, n)$, obtenim $g_2(m, n_2) \equiv 0$ i per tant qualsevol valor de m seria solució, però substituint $n = n_2$ a $g_3(m, n)$ veiem que les úniques solucions que obtenim són complexes.

Es pot comprovar que els tres parells de solucions obtingudes (m_i, n_i) amb $i = 1, 3, 4$, són solució dels tres polinomis de la base de Gröbner i per tant del sistema (5.3.9).

Finalment, prenent els valors obtinguts (m_1, n_1) , (m_3, n_3) i (m_4, n_4) , i avaluant-los a les expressions de a, b, c i d donades a (5.3.8), obtenim els següents resultats:

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) &= (c_1, d_1) = P_1, \\ (a_3, b_3) &= (c_3, d_3) = P_3, \\ (a_4, b_4) &= (c_4, d_4) = P_2.\end{aligned}$$

És dir, les solucions obtingudes es corresponen amb els punts fixos de G . Consegüentment, l'aplicació no té punts 2-periòdics. ■

5.3.4 Estudi dels punts 3-periòdics

En aquesta secció demostrem el següent resultat:

Proposició 5.3.7. *L'aplicació G té dotze punts 3-periòdics, que corresponen a quatre òrbites periòdiques de període mínim 3.*

Considerem l'aplicació donada a (5.1.1) i busquem els punts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tals que $G(G(G(a, b))) = (a, b)$. Seguint la mateixa idea que als apartats anteriors, considerarem $G(a, b) = (c, d)$, $G(c, d) = (e, f)$ i $G(e, f) = (a, b)$, tot obtenint les següents igualtats:

$$\begin{aligned}\frac{5a + 5b + ab + 9}{(a + b + 2)^{4/3}} &= c \quad \text{i} \quad \frac{a + b + 6}{(a + b + 2)^{2/3}} = d, \\ \frac{5c + 5d + cd + 9}{(c + d + 2)^{4/3}} &= e \quad \text{i} \quad \frac{c + d + 6}{(c + d + 2)^{2/3}} = f, \\ \frac{5e + 5f + ef + 9}{(e + f + 2)^{4/3}} &= a \quad \text{i} \quad \frac{e + f + 6}{(e + f + 2)^{2/3}} = b.\end{aligned}$$

Per tal de facilitar les operacions introduïm tres variables auxiliars, m, n i r , les quals hauran de complir les relacions $m^3 = a + b + 2$, $n^3 = c + d + 2$ i $r^3 = e + f + 2$. Si tenim

en compte aquesta notació, les noves equacions a resoldre són les següents:

$$\begin{aligned}
 d_1(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= m^3 - a - b - 2 = 0, \\
 d_2(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= n^3 - c - d - 2 = 0, \\
 d_3(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= r^3 - e - f - 2 = 0, \\
 d_4(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -cm^4 + ab + 5a + 5b + 9 = 0, \\
 d_5(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -dm^2 + a + b + 6 = 0, \\
 d_6(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -en^4 + cd + 5c + 5d + 9 = 0, \\
 d_7(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -fn^2 + c + d + 6 = 0, \\
 d_8(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -ar^4 + ef + 5e + 5f + 9 = 0, \\
 d_9(a, b, c, d, e, f, m, n, r) &:= -br^2 + e + f + 6 = 0.
 \end{aligned}$$

Resolem primer el sistema format per les equacions $\{d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, d_5 = 0, d_7 = 0, d_9 = 0\}$ (on obviem les variables per alleugerir notació), i obtenim:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m^3 r^2 - r^3 - 2r^2 - 4}{r^2}, \\
 b &= \frac{r^3 + 4}{r^2}, \\
 c &= \frac{m^2 n^3 - m^3 - 2m^2 - 4}{m^2}, \\
 d &= \frac{m^3 + 4}{m^2}, \\
 e &= \frac{n^2 r^3 - n^3 - 2n^2 - 4}{n^2}, \\
 f &= \frac{n^3 + 4}{n^2}.
 \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Substituint aquest resultat a d_4 , d_6 , i d_8 , obtenim unes noves equacions:

$$\left\{ \begin{aligned}
 d_{10}(m, n, r) &= -m^4 n^3 r^4 + m^5 r^4 + 2m^4 r^4 + m^3 r^5 + 5m^3 r^4 + 4m^2 r^4 - r^6 + 4m^3 r^2 \\
 &\quad - 2r^5 - r^4 - 8r^3 - 8r^2 - 16 = 0, \\
 d_{11}(m, n, r) &= -m^4 n^4 r^3 + m^4 n^5 + m^5 n^3 + 2m^4 n^4 + 5m^4 n^3 - m^6 + 4m^4 n^2 - 2m^5 \\
 &\quad + 4m^2 n^3 - m^4 - 8m^3 - 8m^2 - 16 = 0, \\
 d_{12}(m, n, r) &= -m^3 n^4 r^4 + n^4 r^5 + n^5 r^3 + 2n^4 r^4 + 5n^4 r^3 - n^6 + 4n^4 r^2 - 2n^5 \\
 &\quad + 4n^2 r^3 - n^4 - 8n^3 - 8n^2 - 16 = 0.
 \end{aligned} \right. \tag{5.3.14}$$

Per tant, si (m, n, r) és solució real del sistema (5.3.14), existeix o bé una òrbita periòdica amb període mínim 3 o bé un punt fix, donat per (5.3.13). Observem també que si $m \cdot n \cdot r = 0$ aleshores (m, n, r) no pot ser solució de l'anterior sistema.

Considerem les següents observacions:

Lema 5.3.8. *Si (m_0, n_0, r_0) és una solució del sistema (5.3.14), aleshores també ho són (n_0, r_0, m_0) i (r_0, m_0, n_0) .*

Demostració. Sigui $\phi(m, n, r) = d_{10}(m, n, r)$, observem que es verifica la següent simetria:

$$\begin{aligned}\phi(m, n, r) &= d_{10}(m, n, r), \\ \phi(n, r, m) &= d_{11}(m, n, r) = d_{10}(n, r, m), \\ \phi(r, m, n) &= d_{12}(m, n, r) = d_{10}(r, m, n).\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

Sigui (m_0, n_0, r_0) una solució del sistema (5.3.14), aleshores a partir de la simetria (5.3.15), obtenim:

$$\begin{cases} d_{10}(n_0, r_0, m_0) = d_{11}(m_0, n_0, r_0) = 0, \\ d_{11}(n_0, r_0, m_0) = d_{10}(r_0, m_0, n_0) = d_{12}(m_0, n_0, r_0) = 0, \\ d_{12}(n_0, r_0, m_0) = d_{10}(m_0, n_0, r_0) = 0, \end{cases}\tag{5.3.16}$$

per tant (n_0, r_0, m_0) també és solució. Analogament,

$$\begin{cases} d_{10}(r_0, m_0, n_0) = d_{12}(m_0, n_0, r_0) = 0, \\ d_{11}(r_0, m_0, n_0) = d_{10}(m_0, n_0, r_0) = 0, \\ d_{12}(r_0, m_0, n_0) = d_{10}(n_0, r_0, m_0) = d_{11}(m_0, n_0, r_0) = 0, \end{cases}\tag{5.3.17}$$

i per tant (r_0, m_0, n_0) també és solució. ■

A partir de l'anterior resultat obtenim també:

Observació 5.3.9. Si tenim una òrbita de període mínim 3 de l'aplicació G donada pels punts $\{(a, b); (c, d); (e, f)\}$ amb paràmetres associats m, n i r respectivament, aleshores aquesta òrbita es correspon amb les solucions (m, n, r) , (n, r, m) i (r, m, n) del sistema (5.3.14).

El Lema 5.3.10 que enunciem a continuació serveix per fer una primera caracterització del lloc geomètric on estan localitzades les solucions del sistema (5.3.14). Abans d'enunciar el resultat, necessitem introduir els següents polinomis auxiliars:

$$\begin{aligned}d_{13}(n, r) &= \text{Res}(d_{10}(m, n, r), d_{11}(m, n, r); m) \text{ de grau } 25 \text{ en } n \text{ i de grau } 47 \text{ en } r, \\ d_{14}(n, r) &= \text{Res}(d_{10}(m, n, r), d_{12}(m, n, r); m) \text{ de grau } 37 \text{ en } n \text{ i de grau } 37 \text{ en } r, \\ d_{15}(n, r) &= \text{Res}(d_{11}(m, n, r), d_{12}(m, n, r); m) \text{ de grau } 47 \text{ en } n \text{ i de grau } 37 \text{ en } r.\end{aligned}$$

Seguidament, apliquem de nou la resultant per aconseguir polinomis que només depenguin d'una variable:

$$\begin{aligned} d_{16}(n) &= \text{Res}(d_{14}(n, r), d_{15}(n, r); r), \\ d_{17}(r) &= \text{Res}(d_{14}(n, r), d_{15}(n, r); n), \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

on $\text{grau}_n(d_{16}(n)) = 2521$ i $\text{grau}_r(d_{17}(r)) = 1985$.

Introduïm ara el polinomi

$$d_{18}(n) = \gcd(d_{16}(n), d_{17}(n)) / n^{716}. \quad (5.3.19)$$

Aquest polinomi té grau 371. Aplicant un algorisme basat en el mètode de Sturm o fent servir la instrucció `realroot` en Maple v.17, es pot veure que existeixen 16 solucions reals del polinomi d_{18} (vegeu la demostració de la prova de la Proposició 5.3.7, donada més endavant, per més detalls).

Lema 5.3.10. *Siguin I_i amb $i = 1, \dots, 16$ certs intervals disjunts que contenen, de forma isolada, totes les solucions reals diferents del polinomi d_{18} . Aleshores, tota solució real (m, n, r) del sistema (5.3.14) està continguda, de forma isolada, a alguna de les caixes (ortoesdres):*

$$I_i \times I_j \times I_k, \quad (5.3.20)$$

on $i, j, k \in \{1, \dots, 16\}$.

Demostració. Observem que si (m, n, r) és una solució real del sistema (5.3.14), aleshores n és un zero real del polinomi d_{16} . Fent servir la simetria (5.3.15), o més concretament, a partir de les equacions (5.3.17), obtenim que (m, n) ha de ser un zero de $d_{14}(m, n)$ i $d_{15}(m, n)$, i en conseqüència n ha de ser un zero real de d_{17} . Per tant n ha de ser un zero real de $\gcd(d_{16}(n), d_{17}(n))$, un polinomi de grau 1087. Com que ens interessen els valors no nuls, podem extreure el factor n^{716} de l'anterior polinomi, obtenint el polinomi $d_{18}(n)$. Anàlogament, es pot veure que m i r han de ser solucions del polinomi d_{18} .

Si I_i amb $i = 1, \dots, 16$ són certs intervals que contenen aquestes solucions de forma isolada, qualsevol solució (m, n, r) del sistema (5.3.14) ha d'estar continguda dins d'alguna caixa de la forma (5.3.20), i cada caixa d'aquest tipus com a molt té una solució. ■

Demostració de la Proposició 5.3.7. Seguirem el passos descrits a la Secció 5.3.2:

Pas 1: Usant la instrucció `realroot` de Maple v.17 aplicada al polinomi d_{18} obtenim que hi ha 16 arrels reals diferents d'aquest polinomi donades per les solucions exactes $n = -1$, $n = 2$ i per 14 altres solucions contingudes als intervals de longitud acotada per 10^{-20} i extrems racionals:

$$I_1 = \left[-\frac{4308988841618670568853}{147573952589676412928}, -\frac{34471910732949364550823}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_2 = \left[-\frac{34411805733101949308435}{1180591620717411303424}, -\frac{17205902866550974654217}{590295810358705651712} \right];$$

$$I_3 = \left[-\frac{9138398550509024508051}{1180591620717411303424}, -\frac{4569199275254512254025}{590295810358705651712} \right];$$

$$I_4 = \left[-\frac{4416518740855918762195}{590295810358705651712}, -\frac{8833037481711837524389}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_5 = \left[-\frac{994661336537171251825}{295147905179352825856}, -\frac{3978645346148685007299}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_6 = \left[-\frac{3977374161031280580629}{1180591620717411303424}, -\frac{994343540257820145157}{295147905179352825856} \right];$$

$$I_7 = \left[-\frac{197879469664271669175}{73786976294838206464}, -\frac{3166071514628346706799}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_8 = \left[-\frac{3144313156826151948503}{1180591620717411303424}, -\frac{1572156578413075974251}{590295810358705651712} \right];$$

$$I_9 = \left[-\frac{399397086201257638833}{295147905179352825856}, -\frac{1597588344805030555331}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_{10} = \left[-\frac{1053526769518098399097}{4722366482869645213696}, -\frac{131690846189762299887}{590295810358705651712} \right];$$

$$I_{11} = \left[-\frac{1064910654630154190265}{9444732965739290427392}, -\frac{133113831828769273783}{1180591620717411303424} \right];$$

$$I_{12} = \left[\frac{1065572958580542810237}{9444732965739290427392}, \frac{532786479290271405119}{4722366482869645213696} \right];$$

$$I_{13} = \left[\frac{128535594827653577343}{590295810358705651712}, \frac{1028284758621228618745}{4722366482869645213696} \right];$$

$$I_{14} = \left[\frac{177910645965499912685}{147573952589676412928}, \frac{1423285167723999301481}{1180591620717411303424} \right].$$

Fent un abús de llenguatge, considerarem també els intervals degenerats $I_{15} = [-1, 1]$ i $I_{16} = [2, 2]$ que contenen les solucions exactes $n = -1$ i $n = 2$. Pel Lema 5.3.10, totes les solucions reals del sistema (5.3.14) estan contingudes a alguna de les caixes $\mathcal{I}_{i,j,k} = I_i \times I_j \times I_k$, amb $i, j, k \in \{1, \dots, 16\}$ (anomenarem caixes degenerades als conjunts $\mathcal{I}_{i,j,k}$ tals que algun índex i, j o k és 15 o 16).

Indiquem aquí que la instrucció `realroot` dóna intervals que contenen *una única solució real* del polinomi d_{18} , per tant si una caixa $\mathcal{I}_{i,j,k}$ conté una solució del sistema (5.3.14), aquesta és única.

Pas 2: A continuació apliquem el procediment de descart a la col·lecció de 256 caixes (16×16) $\mathcal{I}_{i,j,k}$ de la forma per (5.3.20) on els intervals són els calculats anteriorment. Els codis dels procediments de descart es donen a la secció 5.3.5.

Primerament, observem que si prenem $\xi = 30$ i apliquem a totes les caixes la translació indicada a l'Observació 5.3.4, obtenim una nova col·lecció de caixes $\tilde{\mathcal{I}}_{i,j,k}$ contingudes a l'octant O^+ . Aplicant el procediment de descart sobre el polinomi $f(m, n, r) = d_{10}(m - \xi, n - \xi, r - \xi)$, obtenim que qualsevol solució del sistema (5.3.14) ha d'estar continguda a alguna de les següents 16 caixes no descartades:

$\mathcal{I}_{1,5,11}$	$\mathcal{I}_{2,6,12}$	$\mathcal{I}_{3,7,13}$	$\mathcal{I}_{4,8,10}$
$\mathcal{I}_{5,11,1}$	$\mathcal{I}_{6,12,2}$	$\mathcal{I}_{7,13,3}$	$\mathcal{I}_{8,10,4}$
$\mathcal{I}_{9,9,9}$	$\mathcal{I}_{10,4,8}$	$\mathcal{I}_{11,1,5}$	$\mathcal{I}_{12,2,6}$
$\mathcal{I}_{13,3,7}$	$\mathcal{I}_{14,14,14}$	$\mathcal{I}_{16,16,15}$	$\mathcal{I}_{16,16,16}$

(5.3.21)

La caixa degenerada $\mathcal{I}_{16,16,15}$ correspon a $(m, n, r) = (2, 2, -1)$ que és una solució exacta de $d_{10}(m, n, r) = 0$. A partir de l'Observació 5.3.9, podem concloure que el fet que les caixes $\mathcal{I}_{16,15,16}$ i $\mathcal{I}_{15,16,16}$ hagin estat descartades implica que $(m, n, r) = (2, 2, -1)$ no és solució del sistema (5.3.14)[‡]. En efecte, de fet $d_{11}(2, 2, -1) = 2304$. És interessant assenyalar que si apliquem l'algorisme de descart pel conjunt de caixes (5.3.21) i pel polinomi d_{11} la caixa $\mathcal{I}_{16,16,15}$ queda descartada.

[‡]A partir de l'Observació 5.3.9, sempre que es descarti una caixa $\mathcal{I}_{i,j,k}$ automàticament podem descartar les caixes $\mathcal{I}_{j,k,i}$ i $\mathcal{I}_{k,i,j}$

Pas 3: Observem que les caixes $\mathcal{I}_{9,9,9}$, $\mathcal{I}_{14,14,14}$ i $\mathcal{I}_{16,16,16}$ corresponen als punts fixos de G descrits a (5.3.1), i per tant les descartarem. En efecte, el punt fix P_1 es correspon amb $(m, n, r) = (2, 2, 2)$ per tant amb la solució del sistema (5.3.14) que pertany a $\mathcal{I}_{16,16,16}$.

Pel punt fix P_2 , l'única solució real que verifica l'equació $m^3 = a + b + 2$ ve donada per l'expressió (5.3.11). Tenint en compte que en aquest cas, $(a, b) = (c, d) = (e, f)$, obtenim $m = n = r$. Per tant, podem comprovar que P_2 es correspon amb una solució (m, n, r) del sistema (5.3.14) que pertany a la caixa $\mathcal{I}_{14,14,14}$.

Anàlogament, veiem que pel punt P_3 , l'única solució real que verifica l'equació $m^3 = a + b + 2$ ve donada per l'expressió (5.3.12). Com abans, sabem que $m = n = r$ i consegüentment podem comprovar que P_3 es correspon amb una solució del sistema (5.3.14) continguda a la caixa $\mathcal{I}_{9,9,9}$. Descartarem, doncs també, aquesta caixa.

Pas 4: En resum, disposem de 12 caixes no descartades que si corresponguessin a punts de període mínim 3, per l'Observació 5.3.9, contindrien els paràmetres (m, n, r) corresponents als punts de cada òrbita segons les següents agrupacions:

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathcal{I}_{1,5,11}} & \boxed{\mathcal{I}_{5,11,1}} & \boxed{\mathcal{I}_{11,1,5}} \\
 \boxed{\mathcal{I}_{2,6,12}} & \boxed{\mathcal{I}_{6,12,2}} & \boxed{\mathcal{I}_{12,2,6}} \\
 \boxed{\mathcal{I}_{3,7,13}} & \boxed{\mathcal{I}_{7,13,3}} & \boxed{\mathcal{I}_{13,3,7}} \\
 \boxed{\mathcal{I}_{4,8,14}} & \boxed{\mathcal{I}_{8,14,4}} & \boxed{\mathcal{I}_{14,4,8}}
 \end{array} \tag{5.3.22}$$

A continuació comprovarem que les 12 caixes donades anteriorment contenen una solució del sistema (5.3.14), que serà única tal i com hem argumentat anteriorment. Ho farem aplicant el Teorema de Poincaré-Miranda (Teorema 5.3.5). Novament, a partir de l'Observació 5.3.9 només cal demostrar que hi ha una solució del sistema (5.3.14) a les caixes: $\mathcal{I}_{1,5,11}$, $\mathcal{I}_{2,6,12}$, $\mathcal{I}_{3,7,13}$, i $\mathcal{I}_{4,8,14}$.

Donarem amb tot detall la demostració de l'existència d'una solució de l'equació (5.3.14) a la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$. L'existència de solució a les altres caixes s'obté de forma anàloga.

Considerem la funció polinòmica

$$f(m, n, r) = (d_{10}(m, n, r), d_{11}(m, n, r), d_{12}(m, n, r)),$$

i introduïm la següent notació per denotar els extrems dels intervals I_1 , I_5 i I_{11} respectivament:

$$[m_i, m_s] := I_1, [n_i, n_s] := I_5, [r_i, r_s] := I_{11}.$$

Considerem també el punt mig de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$,

$$p = (\bar{m}, \bar{n}, \bar{r}) = \left(\frac{m_i + m_s}{2}, \frac{n_i + n_s}{2}, \frac{r_i + r_s}{2} \right).$$

Notem, en primer lloc, que no és possible verificar les hipòtesis del Teorema de Poincaré-Miranda a la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$ directament. En efecte, una comprovació mostra que als punts (m_i, \bar{n}, \bar{r}) i (m_s, \bar{n}, \bar{r}) cap de les funcions d_{10} , d_{11} i d_{12} canvia de signe.

Considerem doncs, la funció

$$g(m, n, r) = (g_1(m, n, r), g_2(m, n, r), g_3(m, n, r)) = Df^{-1}(p) \cdot f(m, n, r).$$

En particular, comprovem que la matriu diferencial de f al punt p és invertible. Ometem aquí l'expressió analítica de la matriu $Df^{-1}(p)$ i de la funció g ja que involucra nombres racionals amb numeradors i denominadors amb centenars de dígitos.

Observem que donat que $\text{Rang}(Df^{-1}(p)) = 3$ (i per tant $\text{Ker}(Df^{-1}(p)) = \{(0, 0, 0)\}$), el punt (m_0, n_0, r_0) és un zero de la funció g si i només si ho és per la funció f . A continuació, veurem que es verifiquen les condicions del Teorema de Poincaré-Miranda per la funció g a la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$ provant, en conseqüència, l'existència d'algun zero de f en aquesta caixa.[§]

[§]De forma intuïtiva l'elecció de la funció g respon a la següent idea: donat que la mida de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$ és molt petita, si existeix algun zero $p_0 = (m_0, n_0, r_0)$ de la funció g , aleshores $p \simeq p_0$ i per tant $g(p) \simeq \mathbf{0}$. En conseqüència, usant el seu desenvolupament de Taylor tenim:

$$\begin{aligned} g(m, n, r) &= g(p) + Dg(p) \cdot (m - p_1, n - p_2, r - p_3)^t + O(2) \\ &= g(p) + Df^{-1}(p)Df(p) \cdot (m - p_1, n - p_2, r - p_3)^t + O(2) \\ &\simeq (m - p_1, n - p_2, r - p_3)^t, \end{aligned}$$

(vegeu la Figura 3). En conseqüència, la funció g és una bona candidata per verificar les hipòtesis del Teorema de Poincaré-Miranda.

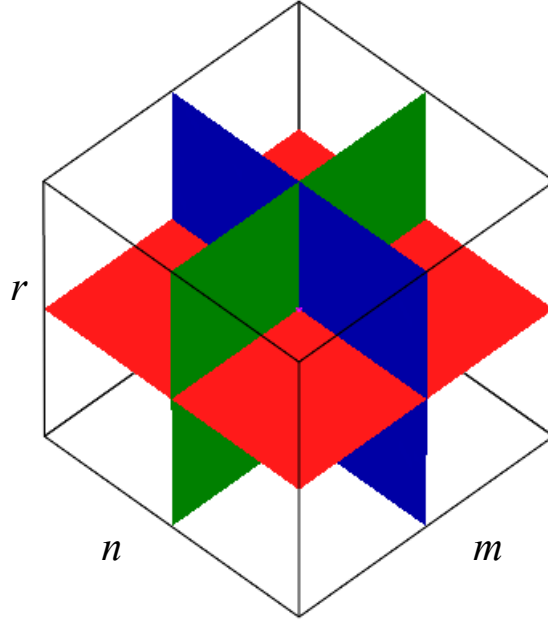


Figura 3. Gràfiques de les superfícies $g_1(m, n, r) = 0$, $g_2(m, n, r) = 0$ i $g_3(m, n, r) = 0$ en blau, verd i vermell respectivament, a la caixa $[\bar{m} - 10^{-10}, \bar{m} + 10^{-10}] \times [\bar{n} - 10^{-10}, \bar{n} + 10^{-10}] \times [\bar{r} - 10^{-10}, \bar{r} + 10^{-10}]$.

(a) *Anàlisi de la funció g a les cares $m = m_i$ i $m = m_s$ de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$:* Considerem la funció

$$g_{1,m}(n, r) = g_1(m_i, n, r) \cdot g_1(m_s, n, r).$$

Volem demostrar que $g_{1,m}(n, r) < 0$ per tot $(n, r) \in I_5 \times I_{11}$. A tal efecte aplicarem el Lema B (enunciat a l'Appendix 6.A i extret de [45], una variació del qual ja hem fet servir al Capítol 3).

- (i) Usant la instrucció **realroot** obtenim que la funció $g_{1,m}(\bar{n}, r)$ té 6 arrels reals localitzades als intervals:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{29765834943780904704135045}{1180591620717411303424}, -\frac{7441458735945226176033761}{295147905179352825856} \right], \\ & \left[-\frac{29765834943780904704132505}{1180591620717411303424}, -\frac{3720729367972613088016563}{147573952589676412928} \right], \\ & \left[-\frac{532455327316335487077}{4722366482869645213696}, -\frac{1064910654632670974153}{9444732965739290427392} \right], \\ & \left[-\frac{133113831828454675797}{1180591620717411303424}, -\frac{1064910654627637406375}{9444732965739290427392} \right], \end{aligned}$$

$$\left[\frac{184686059834154566122507}{1180591620717411303424}, \frac{46171514958538641530627}{295147905179352825856} \right],$$

$$\left[\frac{184686059834154566122525}{1180591620717411303424}, \frac{92343029917077283061263}{590295810358705651712} \right],$$

que aproximadament són:

$$[-25212.64289992, -25212.64289992], [-25212.64289992, -25212.64289992],$$

$$[-0.1127518012945, -0.1127518012945], [-0.1127518012940, -0.1127518012940],$$

$$[156.4351775781, 156.4351775781], [156.4351775781, 156.4351775781].$$

Podem comprovar per tant, que $g_{1,m}(\bar{n}, r)$ no té cap arrel per $r \in I_{11}$. En efecte, observem que

$$I_{11} \simeq [-0.1127518012942357299243, -0.1127518012942357299242],$$

així doncs, no hi ha cap de les sis arrels trobades, al seu interior.

- (ii) De forma similar a l'apartat anterior s'obté que la funció $g_{1,m}(n, r_i) \cdot g_{1,m}(n, r_s)$ té 4 arrels reals, però cap d'elles per $n \in I_5$.
- (iii) Comprovem també que el discriminant $\Delta_r(g_{1,m}(n, r))$ és un polinomi de grau 192 en n amb 37 arrels reals. Calculant de forma exacta intervals de mida adequada que continguin aquestes arrels de forma aïllada, podem comprovar que aquest discriminant no s'anul·la per $n \in I_5$.

Aleshores, pel Lema B, podem garantir que $g_1(n, r)$ no s'anul·la per $(n, r) \in I_5 \times I_{11}$. Tenint en compte que $g_{1,m}(\bar{n}, \bar{r}) < 0$, obtenim que $g_{1,m}(n, r) < 0$ per tot $(n, r) \in I_5 \times I_{11}$.

(b) *Anàlisi de la funció g a les cares $n = n_i$ i $n = n_s$ de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$:* Considerem la funció $g_{2,n}(m, r) = g_2(m, n_i, r) \cdot g_2(m, n_s, r)$.

- (i) Treballant de forma anàloga a l'apartat (a) obtenim que la funció $g_{2,n}(\bar{m}, r)$ té sis arrels reals localitzades en certs intervals que contenen aquestes arrels de forma aïllada. Una comprovació indica que la funció no té cap arrel per $r \in I_{11}$.
- (ii) La funció $g_{2,n}(m, r_i) \cdot g_{2,n}(m, r_s)$ té 4 arrels reals, cap d'elles per $m \in I_1$.
- (iii) El discriminant $\Delta_r(g_{2,n}(m, r))$ és un polinomi de grau 192 en m amb 27 arrels reals, que no s'anul·la per $m \in I_1$.

Una comprovació indica que $g_{2,n}(\bar{m}, \bar{r}) < 0$, i per tant obtenim que $g_{2,n}(m, r) < 0$ per tot $(m, r) \in I_1 \times I_{11}$.

(c) *Anàlisi de la funció g a les cares $r = r_i$ i $r = r_s$ de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$:* Considerem la funció $g_{3,r}(m, n) = g_3(m, n, r_i) \cdot g_3(m, n, r_s)$.

- (i) La funció $g_{3,r}(\bar{m}, n)$ té 2 arrels reals. Calculant els intervals que les contenen, podem comprovar que no té cap arrel per $n \in I_5$.
- (ii) La funció $g_{3,r}(m, n_i) \cdot g_{3,r}(m, n_s)$ té 4 arrels reals, cap d'elles per $m \in I_1$.
- (iii) El discriminant $\Delta_n(g_{3,r}(m, n))$ és un polinomi de grau 192 en m amb 25 arrels reals, que no s'anul·la per $m \in I_1$.

Com que $g_{3,r}(\bar{m}, \bar{n}) < 0$, obtenim que $g_{3,r}(m, n) < 0$ per tot $(m, n) \in I_1 \times I_5$.

A partir de les comprovacions dels apartats (a), (b) i (c), la funció $g(m, n, r)$ verifica les hipòtesis del Teorema de Poincaré-Miranda i per tant, tant g com la funció f , tenen un zero a $\mathcal{I}_{1,5,11}$, que per construcció és únic. ■

Per tal de localitzar els punts periòdics farem servir la informació continguda a les 12 caixes (5.3.22) que apareixen a la demostració anterior, i també les acotacions que es presenten al següent resultat:

Lema 5.3.11. *Donats $m \in [m_i, m_s]$ i $r \in [r_i, r_s]$ i les funcions $a(m, r)$ i $b(r)$ donades a les equacions (5.3.13), tenim que:*

(i) *Si $0 < r_i \leq r_s$ aleshores*

$$a_i := m_i^3 - r_s - 2 - \frac{4}{r_i^2} \leq a \leq m_s^3 - r_i - 2 - \frac{4}{r_s^2} =: a_s \quad (5.3.23)$$

$$b_i := r_i + \frac{4}{r_s^2} \leq b \leq r_s + \frac{4}{r_i^2} =: b_s$$

(ii) *Si $r_i \leq r_s < 0$ aleshores*

$$a_i := m_i^3 - r_s - 2 - \frac{4}{r_s^2} \leq a \leq m_s^3 - r_i - 2 - \frac{4}{r_i^2} =: a_s \quad (5.3.24)$$

$$b_i := r_i + \frac{4}{r_i^2} \leq b \leq r_s + \frac{4}{r_s^2} =: b_s$$

Demostració. Observem que a partir de les equacions (5.3.13) tenim:

$$a = m^3 - r - 2 - \frac{4}{r^2} \text{ i } b = r + \frac{4}{r^2}. \quad (5.3.25)$$

Per altra banda, observem que amb independència del signe de m_i i m_s tenim

$$m_i^3 \leq m^3 \leq m_s^3. \quad (5.3.26)$$

Així doncs:

(i) Si $0 < r_i \leq r \leq r_s$ aleshores

$$-r_s \leq -r \leq -r_i < 0. \quad (5.3.27)$$

Per altra banda

$$0 < \frac{1}{r_s} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_i},$$

per tant

$$0 < \frac{4}{r_s^2} \leq \frac{4}{r^2} \leq \frac{4}{r_i^2}, \quad (5.3.28)$$

i finalment

$$-\frac{4}{r_i^2} \leq -\frac{4}{r^2} \leq -\frac{4}{r_s^2} < 0. \quad (5.3.29)$$

Fent servir les inequacions (5.3.26)–(5.3.29), obtenim les inequacions (5.3.23).

(ii) Si $r_i \leq r \leq r_s < 0$ aleshores

$$0 < -r_s \leq -r \leq -r_i. \quad (5.3.30)$$

D'altra banda,

$$0 < r_s^2 \leq r^2 \leq r_i^2,$$

per la qual cosa

$$0 < \frac{4}{r_i^2} \leq \frac{4}{r^2} \leq \frac{4}{r_s^2}, \quad (5.3.31)$$

i per tant

$$-\frac{4}{r_s^2} \leq -\frac{4}{r^2} \leq -\frac{4}{r_i^2} < 0. \quad (5.3.32)$$

A partir de les inequacions (5.3.26) i (5.3.30)–(5.3.32), obtenim les inequacions (5.3.24).

■

Aplicant ara, per exemple, el Lemma 5.3.11 (ii) (inequacions (5.3.24)) obtenim que el punt 3 periòdic (a, b) de l'aplicació G corresponent als valors (m, n, r) de la caixa $\mathcal{I}_{1,5,11}$, satisfà $a \in [a_i, a_s]$ i $b \in [b_i, b_s]$ on

$$a_i = -\frac{1435686715756812113129131753291751212473714621389705932746390847605145815709035232062993533718832495489341}{56947609584619278435915236206283183709714097978506070511694763452312581699417401160811385506316156928},$$

$$a_s = -\frac{47044582301919219323098597682011430719430330620984084471100755414697990442772197382375529104298060913286874119}{1866059270868804515791575090678155019012542140400238364480469557193740712623709418953041434224970065510400},$$

i

$$b_i = \frac{3368785687756582636246263551756811406295236320753178521304454421527}{10710654937528498667637446691242283113536911386660380934878003200},$$

$$b_s = \frac{6579659546399575461418490144259606329620802274396204966850496409}{20919247924860348960190099800217926294342327605140376818548736}.$$

Fent servir l'aproximació decimal obtenim:

$$a \in [a_i, a_s] \simeq [-25210.65811592151931268164, -25210.65811592151931267888], \quad i$$

$$b \in [b_i, b_s] \simeq [314.5265819322469464743350, 314.5265819322469464749260],$$

on observem que $\max(|a_s - a_i|, |b_s - b_i|) \simeq 2.76 \cdot 10^{-18}$.

Així doncs, aplicant el Lema 5.3.11 a les 12 caixes (5.3.22) que corresponen a punts de període mínim 3, obtenim les corresponents acotacions *racionals* de les coordenades dels punts periòdics, que resumim en les següents taules. Donem una aproximació decimal de les acotacions, i en tots els casos fem servir la notació

$$\varepsilon = \max(|a_s - a_i|, |b_s - b_i|).$$

Òrbita 1:

Caixa	a_i	a_s	
$\mathcal{I}_{1,5,11}$	-25210.658115921519313	-25210.658115921519313	
$\mathcal{I}_{5,11,1}$	-11.080089229288244821	-11.080089229288244821	
$\mathcal{I}_{11,1,5}$	1.0164106270635353803	1.0164106270635353803	
Caixa	b_i	b_s	ε
$\mathcal{I}_{1,5,11}$	314.52658193224694647	314.52658193224694647	$2.76 \cdot 10^{-18}$
$\mathcal{I}_{5,11,1}$	-29.194152462502174029	-29.194152462502174029	$2.97 \cdot 10^{-20}$
$\mathcal{I}_{11,1,5}$	-3.0178440371837045505	-3.0178440371837045505	$1.03 \cdot 10^{-21}$

Òrbita 2:

Caixa	a_i	a_s	
$\mathcal{I}_{2,6,12}$	-25080.503857555317449	-25080.503857555317449	
$\mathcal{I}_{6,12,2}$	-11.094342178650567807	-11.094342178650567807	
$\mathcal{I}_{12,2,6}$	1.0179782228602330827	1.0179782228602330827	
Caixa	b_i	b_s	ε
$\mathcal{I}_{2,6,12}$	314.36115078061939834	314.36115078061939834	$2.75 \cdot 10^{-18}$
$\mathcal{I}_{6,12,2}$	-29.143225143670723223	-29.143225143670723223	$2.97 \cdot 10^{-20}$
$\mathcal{I}_{12,2,6}$	-3.0165421366176918413	-3.0165421366176918413	$1.03 \cdot 10^{-21}$

Òrbita 3:

Caixa	a_i	a_s	
$\mathcal{I}_{3,7,13}$	-550.35997876621370288	-550.35997876621370288	
$\mathcal{I}_{7,13,3}$	-13.613164340185764400	-13.61316434018576439	
$\mathcal{I}_{13,3,7}$	0.13590789992610542444	0.13590789992610542444	
Caixa	b_i	b_s	ε
$\mathcal{I}_{3,7,13}$	84.580855473468510676	84.580855473468510676	$3.17 \cdot 10^{-19}$
$\mathcal{I}_{7,13,3}$	-7.6737642167841728949	-7.6737642167841728949	$1.91 \cdot 10^{-20}$
$\mathcal{I}_{13,3,7}$	-2.1255835876361107899	-2.1255835876361107899	$1.23 \cdot 10^{-21}$

Òrbita 4:

Caixa	a_i	a_s	
$\mathcal{I}_{4,8,10}$	-500.96942815695686889	-500.96942815695686889	
$\mathcal{I}_{8,10,4}$	-13.481597649423988848	-13.481597649423988848	
$\mathcal{I}_{10,4,8}$	0.088325991394389446424	0.088325991394389446426	
Caixa	b_i	b_s	ε
$\mathcal{I}_{4,8,10}$	80.145842594816842809	80.145842594816842810	$2.95 \cdot 10^{-19}$
$\mathcal{I}_{8,10,4}$	-7.4104176831057891201	-7.4104176831057891201	$1.89 \cdot 10^{-20}$
$\mathcal{I}_{10,4,8}$	-2.0994294342645985249	-2.0994294342645985249	$1.24 \cdot 10^{-21}$

5.3.5 Codis del procediment de descart

A continuació donem el codi amb el procediment de descart que hem fet servir a la demostració de la Proposició 5.3.7, i que hem implementat en el programari de computació simbòlica Maple v.17.

La variable `llista` conté els intervals I_i amb els zeros reals del polinomi d_{18} . El conjunt de caixes no descartades es desa a la variable `llista2`. Cal tenir en compte que `sign(0)` retorna el valor 1.

```

xi:=30;
f:=expand(subs(m=m-xi,n=n-xi,r=r-xi,d10));
contador:=0;
for i to nops(llista) do
  for j to nops(llista) do
    for k to nops(llista) do
      mi:= op(i,llista)[1];
      mi:= op(i,llista)[2];
    end do
  end do
end do

```

```

ni:=op(j,llista)[1];
ns:=op(j,llista)[2];
ri:=op(k,llista)[1];
rs:=op(k,llista)[2];
p:=[(mi+ms)/2,(ni+ns)/2,(ri+rs)/2];
if sign(subs(m=p[1],n=p[2],r=p[3],f))=1 then
  S:=0;
  for k to nops(f) do
    Mii:=maxmin(mi,ms,ni,ns,ri,rs,op(k,f))[1];
    S:=S+Mii
  end do;
  if S<=0 then print('NO Descartat');
    contador:=contador+1;
    llista2[contador]:=[mi,ms,ni,ns,ri,rs];
    print(contador,llista2[contador],'caixa',i,j,k)
  end if
end if;
if sign(subs(m=p[1],n=p[2],r=p[3],f))=-1 then
  S:=0;
  for k to nops(f) do
    Mss:=maxmin(mi,ms,ni,ns,ri,rs,op(k,f))[2];
    S:=S+Mss
  end do;
  if S>=0 then print('NO descartat');
    contador:=contador+1;
    llista2[contador]:=[mi,ms,ni,ns,ri,rs];
    print(contador,llista2[contador],'caixa',i,j,k)
  end if;
end if;
end do;
end do;
end do;

```

L'anterior codi crida la subrutina `maxmin` amb l'algorisme de majoració/minoració segons les fórmules del Lemma 5.3.3 adaptat a \mathbb{R}^3 , i que ve donada per:

```

maxmin:=proc(mi,ms,ni,ns,ri,rs,M) local a,j,k,l,Mi,Ms;
j:=degree(M,m);
l:=degree(M,n);
k:=degree(M,r);
a:=coeffs(M,[m,n,r]);
if a>0 then

```

```

Mi:=a*mi^j*ri^k*ni^l:
Ms:=a*ms^j*rs^k*ns^l:
else
  Mi:=a*ms^j*rs^k*ns^l:
  Ms:=a*mi^j*ri^k*ni^l:
end if;
[Mi,Ms];
end proc:

```

5.4 Estudi de la dinàmica associada al punt de sella P_2

L'objectiu d'aquesta secció és aprofundir en l'estudi de certs fenòmens associats a la dinàmica dels conjunts invariants associats a la sella P_2 . En primer lloc demostrarem que tota òrbita amb condició inicial sobre la corba L_2 convergeix al punt P_2 i que per tant, L_2 està continguda al conjunt estable de la sella[¶].

També donarem evidències numèriques de l'existència d'òrbites homoclíniques, és a dir, de l'existència de punts sobre la varietat inestable local, l'òrbita dels quals convergeix a P_2 . Observem que en el context de la dinàmica de difeomorfismes, aquest resultat seria una evidència numèrica a favor de l'existència d'un conjunt hiperbòlic invariant sobre el qual la dinàmica de l'aplicació seria conjugada a un “subshift” finit (el que es coneix com a *Ferradura d'Smale*), tal i com prediu el Teorema homoclínic de Smale–Birkhoff [51, Teorema 5.3.5].

Finalment, donarem evidències numèriques de punts sobre la varietat inestable local, l'òrbita dels quals convergeix al conjunt de no-definició.

5.4.1 Dinàmica de l'aplicació G sobre la corba L_2

Tot i que M. Chamberland i V. Moll a [23, Teoremes 3 i 4] donen una parametrització de la corba de la corba $R(a, b) = 0$ (la mateixa que hem trobat nosaltres buscant una parametrització pròpia), no coneixem cap resultat sobre la dinàmica de l'aplicació G sobre la component connexa L_2 . En aquesta secció provem aquest resultat:

Proposició 5.4.1. *Donada qualsevol condició inicial sobre la corba L_2 , la seva òrbita per G convergeix al punt P_2 .*

[¶]Fem servir el terme conjunt estable i no varietat estable, perquè globalment el conjunt de condicions inicials que convergeixen a P_2 no és una varietat diferenciable, ja que G no és un difeomorfisme. Per exemple, els punts que pertanyen al conjunt definit a (5.2.3) també formen part del conjunt estable.

Demostració. La corba $R(a, b) = 0$ té gènere 0, i per tant admet una parametrització pròpia racional (vegeu el Capítol 1). És doncs, fàcil veure que admet la parametrització donada per

$$P(t) = \left(\frac{t^3 + 4}{t^2}, \frac{t^3 + 16}{4t} \right).$$

La component L_2 s'obté pels valors del paràmetre $t \in (-\infty, 0)$ i la component L_1 pels valors del paràmetre $t \in (0, \infty)$.

Usant aquesta parametrització d'una manera similar a la que es va fer servir al Capítol 1, podem estudiar la dinàmica de $G|_{L_2}$. En efecte, tenint en compte que

$$P^{-1}(a, b) = \frac{4(a^2 - 3b)}{a^2b - 4b^2 + 3a}$$

(vegeu el Teorema 1.2.18 del Capítol 1) obtenim

$$g(t) = P^{-1} \circ G \circ P(t) = \sqrt[3]{4} \frac{t}{(t+2)^2} \left(\frac{(t^2+4)(t+2)^2}{t^2} \right)^{2/3},$$

vegeu també [23, Teorema 4]. Per a estudiar la dinàmica de G sobre la component connexa L_2 ens interessa, doncs, estudiar l'aplicació $g(t)$ per $t \in \mathcal{I} := (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$. Observem que $t = -2$ correspon al punt $(a, b) = (-1, -1) \in \{R(a, b) = 0\} \cap \Gamma$, on $\Gamma := \{a + b + 2 = 0\}$ és la recta de no-definició de G .

L'aplicació $g(t)$ té un únic punt fix a \mathcal{I}

$$p = -\frac{1}{3} \frac{4C + \sqrt[3]{2}C^2 + 8 \cdot 2^{2/3}}{C} \simeq -4.4111,$$

on $C = \sqrt[3]{86 + 6\sqrt{177}}$. El nostre objectiu és demostrar que aquest punt fix és un atractor global de $g(t)$ a \mathcal{I} .

Primerament resumim algunes de les característiques de l'aplicació $g(t)$ a \mathcal{I} que necessitarem durant la demostració (vegeu la Figura 4):

- (i) Existeixen 2 màxims relatius a \mathcal{I} situats a $t = -4 \mp 2\sqrt{3}$ ($t \simeq -7.4641$ i $t \simeq -0.5359$ respectivament), on $g(-4 \mp 2\sqrt{3}) = -4$. Denotem per $m = -4 - 2\sqrt{3}$.
- (ii) A les asímptotes verticals $t = -2$ i $t = 0^-$ es verifica:

$$\lim_{t \rightarrow -2^\pm} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t) = -\infty.$$

- (iii) També es verifica $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$.

- (iv) Per tot $t \in (-\infty, p)$ es compleix $g(t) > t$.

- (v) No hi ha punts 2-periòdics, és a dir, que verifiquin $g \circ g(t) = t$, excepte el punt fix p (com a conseqüència, en particular, del Teorema 5.3.1 (ii)).

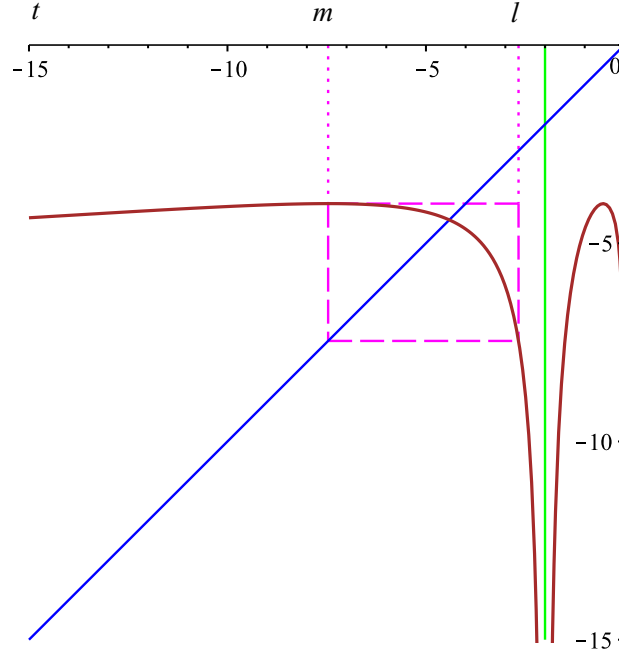


Figura 4. Gràfica de la funció $g(t)$ al conjunt \mathcal{I} .

Farem la demostració de la Proposició 5.4.1 en tres etapes:

(A) Usant la informació dels apartats (i) i (ii), podem concloure que $g((-2, 0)) = (-\infty, -4]$.

(B) Observem que a partir de la informació dels apartats (i) i (ii) també podem concloure que $g((-\infty, -2)) = (-\infty, -4] \subset (-\infty, -2)$ i per tant, que l'interval $(-\infty, -2)$ és invariant per g . Estudiarem, doncs, la dinàmica de l'aplicació a aquest interval.

Sigui $\ell \in (p, -2)$ l'únic valor en aquest interval pel qual $g(\ell) = m$ (de fet $\ell \simeq -2.6675$). Observem que per la monotonia de g , l'interval $[m, \ell]$ és invariant. En efecte,

$$g([m, \ell]) = [g(\ell), g(m)] = [m, -4] \subset [m, \ell],$$

(vegeu la Figura 4). Afirmem ara el següent:

Afirmació: Per tot $t \in (-\infty, m) \cup (\ell, -2)$ existeix algun $n > 0$ tal que $t_n = g^n(t) \in [m, \ell]$.

En efecte, primerament observem que per la monotonia de g a $(\ell, -2)$ tenim que $g((\ell, -2)) = (-\infty, m)$. Degut a que per tot $t \in (-\infty, m)$, $g(t) < -4 < \ell$, tenim $g(t) \notin (\ell, -2)$, i en conseqüència $g(t) \in (-\infty, \ell)$. Per tant, només cal demostrar l'afirmació per $t \in (-\infty, m)$.

Procedim doncs per contradicció. Considerem $t_0 \in (-\infty, m)$ i suposem que cap iterat $t_n \in [m, \ell]$, i que per tant per tot $n > 0$ tenim $t_n \in (-\infty, m)$. Per la propietat (iv) la successió $\{t_n\}$ és creixent, com que estem assumint que està acotada superiorment per m , obtenim que la successió ha de tenir un límit, que per continuïtat ha de ser un punt fix. Com que no hi ha cap punt fix a $(-\infty, m]$ obtenim una contradicció, amb el que queda demostrada l'afirmació anterior. Així doncs, només caldrà estudiar la dinàmica a l'interval $[m, \ell]$.

(C) Estudiem ara la dinàmica a l'interval $[m, \ell]$. Denotem $m_0 := m$ i $\ell_0 := \ell$, i considerem les successions $\ell_k = g^{2k-1}(m_0)$ i $m_k = g^{2k}(m_0)$ per $k \geq 1$. Òbviament, donat que per definició $m = g(\ell)$, s'obté

$$\begin{aligned}\ell_k &= g(m_{k-1}) = g^2(\ell_{k-1}) \quad \text{i} \\ m_k &= g(\ell_k) = g^2(m_{k-1}),\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

i per tant, fent servir que g és estrictament decreixent a $[m, \ell]$, per $k \geq 1$ obtenim

$$[m_{k-1}, \ell_k] := g^{2k-1}([m, \ell]) \quad \text{i} \quad [m_k, \ell_k] := g^{2k}([m, \ell]).$$

Provarem ara que m_k és una successió creixent que convergeix al punt fix p i que ℓ_k és una successió decreixent que convergeix al punt fix p , amb el que quedarà demostrat el resultat.

En efecte, uns petits càlculs ens mostren que $\ell_1 = g(m) = -4 < \ell = \ell_0$, i que $m_0 = m < m_1 = g(\ell_1) = g(-4)$. Procedim ara per inducció tot assumint que $m_{k-1} < m_k$ i $\ell_k < \ell_{k-1}$. Aleshores, fent servir les expressions obtingudes a (5.4.1) i sabent que g és decreixent i $m_{k-1} < m_k$, tenim

$$\ell_k = g(m_{k-1}) > g(m_k) = \ell_{k+1}.$$

Així mateix, com que $\ell_{k+1} < \ell_k$ s'obté

$$m_{k+1} = g(\ell_{k+1}) > g(\ell_k) = m_k.$$

Per tant, la successió $\{m_k\}$ és monòtona creixent i la successió $\{\ell_k\}$ és monòtona decreixent. Com que ambdues són acotades, fent servir les expressions (5.4.1), ambdues convergeixen a un punt fix de g^2 . Però a $[m, \ell]$ no hi ha cap punt 2-periòdic excepte el punt fix p , per tant deduïm que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_k = p.$$

■

5.4.2 Estudi numèric-analític de la varietat inestable

En aquesta secció donem una expressió aproximada de la varietat local inestable del punt de sella P_2 , indicada com $W_{\text{loc}}^u(P_2)$; trobem *de forma numèrica*, un punt

$$P \simeq (-5.67750144031789435343, 4.10574868714920935493)$$

amb un comportament homoclínic, és a dir, que connecta la varietat local inestable $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ amb el seu conjunt estable; i també obtenim dos altres punts

$$Q \simeq (-6.15163017029193114271, 4.15163017029193114271)$$

i

$$Q_{-1} \simeq (-4.43931733951927306714, 3.98185284365899589972),$$

tals que $Q \in W_{\text{loc}}^u(P_2) \cap \Gamma$ i $G(Q_{-1}) = Q$, on $\Gamma = \{a+b+2=0\}$ és la recta de no-definició de l'aplicació G . Aquests punts pertanyen, doncs, al conjunt de no-definició

$$\mathcal{F} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ pels quals existeix } n \geq 0 \text{ tal que } G^n(a, b) \in \Gamma\}.$$

Fem notar que a les anteriors expressions només hem donat els primers decimals obtinguts, vegeu les expressions (5.4.8), (5.4.10) i (5.4.11) on es presenten amb més decimals.

Notem també que una demostració analítica de l'existència de tals punts implicaria que arbitràriament a prop de P_2 hi hauria punts homoclínics i punts que pertanyen al conjunt prohibit de G .

Expressió aproximada de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$

El resultat enunciat a continuació ens permet calcular explícitament els primers termes de la varietat local inestable al voltant d'un punt de sella hiperbòlic, i ens serà d'utilitat per trobar els primers termes del desenvolupament en sèrie de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$, que donem a l'expressió (5.4.7), vegeu també l'expressió general de la varietat local inestable donada a (5.4.5) i (5.4.6).

Lema 5.4.2. *Considerem el sistema dinàmic generat per l'aplicació de classe $\mathcal{C}^6(\mathcal{U})$ en un entorn \mathcal{U} de l'origen:*

$$F(x, y) = \left(\lambda x + \sum_{i+j=2}^5 f_{i,j} x^i y^j + O(\|(x, y)\|^6), \mu y + \sum_{i+j=2}^5 g_{i,j} x^i y^j + O(\|(x, y)\|^6) \right) \quad (5.4.2)$$

on $|\lambda| > 1 > |\mu|$, de tal manera que l'origen és un punt de sella hiperbòlic. Sigui $y = w(x) = \sum_{k=2}^5 w_k x^k + O(x^6)$ l'expressió local de la varietat local inestable de l'origen. *Aleshores:*

$$w_2 = \frac{g_{2,0}}{\lambda^2 - \mu},$$

$$w_3 = \frac{\lambda^2 g_{3,0} - 2 \lambda f_{2,0} g_{2,0} - \mu g_{3,0} + g_{1,1} g_{2,0}}{(\lambda^2 - \mu)(\lambda^3 - \mu)},$$

$$w_4 = \frac{W_4}{(\lambda^2 - \mu)^2 (\lambda^3 - \mu)(\lambda^4 - \mu)},$$

on

$$\begin{aligned} W_4 = & g_{4,0} \lambda^7 + (-3 f_{2,0} g_{3,0} - 2 f_{3,0} g_{2,0}) \lambda^6 + (5 f_{2,0}^2 g_{2,0} - 2 g_{4,0} \mu + g_{2,0} g_{2,1}) \lambda^5 \\ & + ((6 f_{2,0} g_{3,0} + 2 f_{3,0} g_{2,0} - g_{4,0}) \mu - 2 f_{1,1} g_{2,0}^2 - 3 f_{2,0} g_{1,1} g_{2,0} + g_{1,1} g_{3,0}) \lambda^4 \\ & + (g_{4,0} \mu^2 + (-5 f_{2,0}^2 g_{2,0} + 2 f_{3,0} g_{2,0} - g_{2,0} g_{2,1}) \mu - 2 f_{2,0} g_{1,1} g_{2,0} + g_{0,2} g_{2,0}^2) \lambda^3 \\ & + ((-3 f_{2,0} g_{3,0} + 2 g_{4,0}) \mu^2 + (f_{2,0}^2 g_{2,0} + 3 f_{2,0} g_{1,1} g_{2,0} - 2 g_{1,1} g_{3,0} - g_{2,0} g_{2,1}) \mu \\ & + g_{1,1}^2 g_{2,0}) \lambda^2 + (-2 f_{3,0} g_{2,0} \mu^2 + (2 f_{1,1} g_{2,0}^2 + 2 f_{2,0} g_{1,1} g_{2,0}) \mu) \lambda \\ & - g_{4,0} \mu^3 + (-f_{2,0}^2 g_{2,0} + g_{1,1} g_{3,0} + g_{2,0} g_{2,1}) \mu^2 + (-g_{0,2} g_{2,0}^2 - g_{1,1}^2 g_{2,0}) \mu \end{aligned}$$

i

$$w_5 = \frac{\sum_{i=0}^{13} p_i \lambda^i}{(\lambda^2 - \mu)^3 (\lambda^3 - \mu)(\lambda^4 - \mu)(\lambda^5 - \mu)},$$

on

$$\begin{aligned} p_0 = & -\mu^5 g_{5,0} + (-2 f_{2,0} f_{3,0} g_{2,0} + g_{1,1} g_{4,0} + g_{2,0} g_{3,1} + g_{2,1} g_{3,0}) \mu^4 + (2 f_{1,1} f_{2,0} g_{2,0}^2 \\ & + f_{2,0}^2 g_{1,1} g_{2,0} - 2 g_{0,2} g_{2,0} g_{3,0} - g_{1,1}^2 g_{3,0} - 2 g_{1,1} g_{2,0} g_{2,1} - g_{1,2} g_{2,0}^2) \mu^3 \\ & + g_{1,1} g_{2,0} (3 g_{0,2} g_{2,0} + g_{1,1}^2) \mu^2, \\ p_1 = & (-3 f_{2,0}^2 g_{3,0} - 2 f_{4,0} g_{2,0}) \mu^4 + g_{2,0} (3 f_{2,0}^2 g_{1,1} + 2 f_{1,1} g_{3,0} + 2 f_{2,0} g_{2,1} + 2 f_{2,1} g_{2,0} \\ & + 2 f_{3,0} g_{1,1}) \mu^3 - 2 g_{2,0} (f_{0,2} g_{2,0}^2 + 2 f_{1,1} g_{1,1} g_{2,0} + 2 f_{2,0} g_{0,2} g_{2,0} + f_{2,0} g_{1,1}^2) \mu^2, \\ p_2 = & (-3 f_{3,0} g_{3,0} + 3 g_{5,0}) \mu^4 + (-6 f_{2,0}^3 g_{2,0} + 3 f_{1,1} g_{2,0} g_{3,0} + 4 f_{2,0} f_{3,0} g_{2,0} + 3 f_{2,0} g_{1,1} g_{3,0} \\ & + 3 f_{3,0} g_{1,1} g_{2,0} - 3 g_{1,1} g_{4,0} - 2 g_{2,0} g_{3,1} - 3 g_{2,1} g_{3,0}) \mu^3 + (2 f_{1,1} f_{2,0} g_{2,0}^2 - 3 f_{1,1} g_{1,1} g_{2,0}^2 \\ & - 2 f_{2,0}^2 g_{1,1} g_{2,0} - 3 f_{2,0} g_{1,1}^2 g_{2,0} + 4 g_{0,2} g_{2,0} g_{3,0} + 3 g_{1,1}^2 g_{3,0} + 4 g_{1,1} g_{2,0} g_{2,1} \\ & + g_{1,2} g_{2,0}^2) \mu^2 - g_{1,1} g_{2,0} (3 g_{0,2} g_{2,0} + 2 g_{1,1}^2) \mu, \\ p_3 = & (-4 f_{2,0} g_{4,0} + g_{5,0}) \mu^4 + (-4 f_{2,0}^3 g_{2,0} + 9 f_{2,0}^2 g_{3,0} - 4 f_{2,0} f_{3,0} g_{2,0} + 4 f_{2,0} g_{1,1} g_{3,0} \\ & + 4 f_{2,0} g_{2,0} g_{2,1} + 4 f_{4,0} g_{2,0} - g_{1,1} g_{4,0} - g_{2,0} g_{3,1}) \mu^3 + g_{2,0} (4 f_{1,1} f_{2,0} g_{2,0} - f_{2,0}^2 g_{1,1} \\ & - 4 f_{2,0} g_{0,2} g_{2,0} - 4 f_{2,0} g_{1,1}^2 - 4 f_{1,1} g_{3,0} - 4 f_{2,0} g_{2,1} - 2 f_{2,1} g_{2,0} - 4 f_{3,0} g_{1,1} + g_{1,1} g_{2,1} \\ & + g_{1,2} g_{2,0}) \mu^2 + g_{2,0} (4 f_{1,1} g_{1,1} g_{2,0} + 4 f_{2,0} g_{0,2} g_{2,0} + 4 f_{2,0} g_{1,1}^2 - g_{0,2} g_{1,1} g_{2,0}) \mu, \\ p_4 = & \mu^4 g_{5,0} + (-6 f_{2,0} f_{3,0} g_{2,0} + 9 f_{3,0} g_{3,0} + 2 f_{4,0} g_{2,0} - g_{2,0} g_{3,1} - g_{2,1} g_{3,0} - 3 g_{5,0}) \mu^3 \\ & + (6 f_{1,1} f_{2,0} g_{2,0}^2 + 12 f_{2,0}^3 g_{2,0} + 8 f_{2,0}^2 g_{1,1} g_{2,0} - 6 f_{1,1} g_{2,0} g_{3,0} - 2 f_{2,0} f_{3,0} g_{2,0} \\ & - 9 f_{2,0} g_{1,1} g_{3,0} - 2 f_{2,1} g_{2,0}^2 - 8 f_{3,0} g_{1,1} g_{2,0} + 2 g_{0,2} g_{2,0} g_{3,0} + g_{1,1} g_{2,0} g_{2,1} + g_{1,2} g_{2,0}^2 \\ & + 3 g_{1,1} g_{4,0} + g_{2,0} g_{3,1} + 3 g_{2,1} g_{3,0}) \mu^2 + (2 f_{0,2} g_{2,0}^3 - 4 f_{1,1} f_{2,0} g_{2,0}^2 + 5 f_{1,1} g_{1,1} g_{2,0}^2 \\ & + f_{2,0}^2 g_{1,1} g_{2,0} + 6 f_{2,0} g_{1,1}^2 g_{2,0} - 2 g_{0,2} g_{1,1} g_{2,0}^2 - 2 g_{0,2} g_{2,0} g_{3,0} - 3 g_{1,1}^2 g_{3,0} \\ & - 2 g_{1,1} g_{2,0} g_{2,1}) \mu + g_{1,1}^3 g_{2,0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_5 &= (-9f_{2,0}^2g_{3,0} + 12f_{2,0}g_{4,0} + 2f_{4,0}g_{2,0} - 3g_{5,0})\mu^3 + (8f_{2,0}^3g_{2,0} + 9f_{2,0}^2g_{1,1}g_{2,0} \\
 &\quad - 2f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} - 9f_{2,0}^2g_{3,0} + 8f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} - 12f_{2,0}g_{1,1}g_{3,0} - 10f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} - 2f_{2,1}g_{2,0}^2 \\
 &\quad - 2f_{4,0}g_{2,0} + 3g_{1,1}g_{4,0} + 2g_{2,0}g_{3,1})\mu^2 + g_{2,0}(2f_{0,2}g_{2,0}^2 - 4f_{1,1}f_{2,0}g_{2,0} + 2f_{1,1}g_{1,1}g_{2,0} \\
 &\quad - 7f_{2,0}^2g_{1,1} + 8f_{2,0}g_{0,2}g_{2,0} + 8f_{2,0}g_{1,1}^2 + 2f_{1,1}g_{3,0} + 2f_{2,0}g_{2,1} + 2f_{3,0}g_{1,1} - 2g_{1,1}g_{2,1} \\
 &\quad - g_{1,2}g_{2,0})\mu - g_{1,1}g_{2,0}(2f_{2,0}g_{1,1} - g_{0,2}g_{2,0}), \\
 p_6 &= (4f_{2,0}g_{4,0} + 3f_{3,0}g_{3,0} - 3g_{5,0})\mu^3 + (-14f_{2,0}^3g_{2,0} - 3f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} + 12f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} \\
 &\quad - 4f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} - 3f_{3,0}g_{1,1}g_{2,0} - 9f_{3,0}g_{3,0} - 4f_{4,0}g_{2,0} + 2g_{2,0}g_{3,1} + 3g_{2,1}g_{3,0} + g_{5,0})\mu^2 \\
 &\quad + (-10f_{1,1}f_{2,0}g_{2,0}^2 + 3f_{1,1}g_{1,1}g_{2,0}^2 - 6f_{2,0}^3g_{2,0} - 16f_{2,0}^2g_{1,1}g_{2,0} + 4f_{2,0}g_{0,2}g_{2,0}^2 \\
 &\quad + 3f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} + 9f_{2,0}g_{1,1}g_{3,0} + 2f_{2,1}g_{2,0}^2 + 7f_{3,0}g_{1,1}g_{2,0} - 4g_{0,2}g_{2,0}g_{3,0} - 2g_{1,1}g_{2,0}g_{2,1} \\
 &\quad - g_{1,2}g_{2,0}^2 - g_{1,1}g_{4,0} - g_{2,1}g_{3,0})\mu - g_{1,1}(2f_{1,1}g_{2,0}^2 + 3f_{2,0}g_{1,1}g_{2,0} - 2g_{0,2}g_{2,0}^2 - g_{1,1}g_{3,0}), \\
 p_7 &= -\mu^3g_{5,0} + (27f_{2,0}^2g_{3,0} + 12f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} - 12f_{2,0}g_{4,0} - 4f_{4,0}g_{2,0} + g_{2,0}g_{3,1} + 3g_{5,0})\mu^2 \\
 &\quad + (-12f_{1,1}f_{2,0}g_{2,0}^2 - 4f_{2,0}^3g_{2,0} - 18f_{2,0}^2g_{1,1}g_{2,0} + 4f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} + 3f_{2,0}^2g_{3,0} \\
 &\quad - 4f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} + 12f_{2,0}g_{1,1}g_{3,0} + 8f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} + 2f_{2,1}g_{2,0}^2 - g_{1,2}g_{2,0}^2 - 3g_{1,1}g_{4,0} \\
 &\quad - g_{2,0}g_{3,1})\mu - g_{2,0}(2f_{1,1}g_{1,1}g_{2,0} - 5f_{2,0}^2g_{1,1} + 4f_{2,0}g_{0,2}g_{2,0} + 4f_{2,0}g_{1,1}^2 - g_{1,1}g_{2,1}), \\
 p_8 &= (-12f_{2,0}g_{4,0} - 9f_{3,0}g_{3,0} - 2f_{4,0}g_{2,0} + 3g_{5,0})\mu^2 + (28f_{2,0}^3g_{2,0} + 6f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} \\
 &\quad - 6f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} + 8f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} + 2f_{2,1}g_{2,0}^2 + 6f_{3,0}g_{1,1}g_{2,0} + 3f_{3,0}g_{3,0} + 2f_{4,0}g_{2,0} \\
 &\quad - g_{2,0}g_{3,1} - 3g_{2,1}g_{3,0})\mu - 2f_{0,2}g_{2,0}^2 + 4f_{1,1}f_{2,0}g_{2,0}^2 - 3f_{1,1}g_{1,1}g_{2,0}^2 + 8f_{2,0}^2g_{1,1}g_{2,0} \\
 &\quad - 4f_{2,0}g_{0,2}g_{2,0}^2 - 3f_{2,0}g_{1,1}g_{3,0} - 2f_{3,0}g_{1,1}g_{2,0} + 2g_{0,2}g_{2,0}g_{3,0} + g_{1,1}g_{2,0}g_{2,1}, \\
 p_9 &= 3\mu^2g_{5,0} + (-27f_{2,0}^2g_{3,0} - 24f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} + 4f_{2,0}g_{4,0} + 2f_{4,0}g_{2,0} - 2g_{2,0}g_{3,1} - g_{5,0})\mu \\
 &\quad + 12f_{1,1}f_{2,0}g_{2,0}^2 + 9f_{2,0}^2g_{1,1}g_{2,0} - 2f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} - 4f_{2,0}g_{1,1}g_{3,0} - 2f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} \\
 &\quad + g_{1,2}g_{2,0}^2 + g_{1,1}g_{4,0}, \\
 p_{10} &= (12f_{2,0}g_{4,0} + 9f_{3,0}g_{3,0} + 4f_{4,0}g_{2,0} - g_{5,0})\mu - 14f_{2,0}^3g_{2,0} \\
 &\quad - 3f_{1,1}g_{2,0}g_{3,0} - 4f_{2,0}g_{2,0}g_{2,1} - 2f_{2,1}g_{2,0}^2 - 3f_{3,0}g_{1,1}g_{2,0} + g_{2,1}g_{3,0}, \\
 p_{11} &= 9f_{2,0}^2g_{3,0} + 12f_{2,0}f_{3,0}g_{2,0} - 3\mu g_{5,0} + g_{2,0}g_{3,1}, \\
 p_{12} &= -4f_{2,0}g_{4,0} - 3f_{3,0}g_{3,0} - 2f_{4,0}g_{2,0}, \\
 p_{13} &= g_{5,0}.
 \end{aligned}$$

Demostració. Atesa la forma particular de F , la varietat local inestable ve descrita per la funció de classe \mathcal{C}^6 en un entorn de l'origen $y = w(x) = w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)$. Considerem un punt qualsevol sobre la varietat local inestable $(x, w(x)) \in W_{\text{loc}}^u(0, 0)$, com que aquesta és invariant per F tenim $F(x, w(x)) = (x_1, w(x_1))$ per un cert x_1 . Per tant, els punts de la varietat local inestable satisfan:

$$F_2(x, w(x)) = w(F_1(x, w(x))). \quad (5.4.3)$$

On F_1 i F_2 denoten la primera i segona coordenada de l'aplicació F , respectivament. El resultat al qual volem arribar, s'obté doncs igualant els termes d'ordre k en el desenvolupament de Taylor d'ambdós membres de l'equació anterior.

Per exemple, mostrarem com trobar els termes w_2 i w_3 , tot igualant els termes d'ordre 2 i 3 que surten del desenvolupament de l'equació (5.4.3). En efecte, el membre esquerre

de l'equació s'escriu com

$$\begin{aligned}
 F_2(x, w(x)) &= \mu(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)) + g_{2,0}x^2 \\
 &\quad + g_{1,1}x(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)) \\
 &\quad + g_{0,2}(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^2 \\
 &\quad + g_{3,0}x^3 + g_{2,1}x^2(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)) \\
 &\quad + g_{1,2}x(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^2 \\
 &\quad + g_{0,3}(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^3 + O(x^4) \\
 &= \mu w_2x^2 + g_{2,0}x^2 + g_{1,1}w_2x^3 + g_{3,0}x^3 + \mu w_3x^3 + O(x^4) \\
 &= x^2(\mu w_2 + g_{2,0}) + x^3(g_{1,1}w_2 + g_{3,0} + \mu w_3) + O(x^4).
 \end{aligned}$$

Per calcular el membre dret de (5.4.3), primerament considerem:

$$\begin{aligned}
 F_1(x, w(x)) &= \lambda x + f_{2,0}x^2 + f_{1,1}x(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)) \\
 &\quad + f_{0,2}(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^2 + f_{3,0}x^3 \\
 &\quad + f_{2,1}x^2(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6)) \\
 &\quad + f_{1,2}x(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^2 \\
 &\quad + f_{0,3}(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + O(x^6))^3 + O(x^4) \\
 &= \lambda x + f_{2,0}x^2 + O(x^3).
 \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned}
 w(F_1(x, w(x))) &= w_2(\lambda x + f_{2,0}x^2 + O(x^3))^2 + w_3(\lambda x + f_{2,0}x^2 + O(x^3))^3 + O(x^4) \\
 &= w_2\lambda^2x^2 + (2\lambda f_{2,0}w_2 + w_3\lambda^3)x^3 + O(x^4).
 \end{aligned}$$

Així doncs, substituint aquestes expressions a (5.4.3), i igualant els termes de segon grau, obtenim:

$$\mu w_2 + g_{2,0} = w_2\lambda^2 \Rightarrow g_{2,0} = w_2(\lambda^2 - \mu) \Rightarrow w_2 = \frac{g_{2,0}}{\lambda^2 - \mu}.$$

Igualant els termes de tercer grau del desenvolupament anterior, trobem w_3 :

$$g_{1,1}w_2 + g_{3,0} + \mu w_3 = 2\lambda f_{2,0}w_2 + w_3\lambda^3 \Rightarrow w_3 = \frac{(g_{1,1} - 2\lambda f_{2,0})w_2 + g_{3,0}}{(\lambda^3 - \mu)},$$

i per tant

$$w_3 = \frac{(g_{1,1} - 2\lambda f_{2,0})(g_{2,0}/(\lambda^2 - \mu)) + g_{3,0}}{(\lambda^3 - \mu)} = \frac{\lambda^2 g_{3,0} - 2\lambda f_{2,0}g_{2,0} - \mu g_{3,0} + g_{1,1}g_{2,0}}{(\lambda^2 - \mu)(\lambda^3 - \mu)}.$$

De manera anàloga, trobaríem w_4 i w_5 . No reproduïm aquests càlculs donat que la longitud de les seves expressions són excessivament llargues. ■

Per tal de trobar una expressió aproximada de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ fent servir el Lema 5.4.2. Considerem ara la sella oscil·lant $P_2 = (a_2, b_2)$ i el canvi de variable $u = a - a_2$ i $v = b - b_2$, que trasllada P_2 a l'origen. Considerem també l'aplicació conjugada amb G : $\tilde{G}(u, v) = G(u + a_2, v + b_2) - (a_2, b_2)$.

Sigui H , l'aplicació lineal donada per $H(r, s) = L \cdot (r, s)^T$, on L és la matriu formada pels vectors propis de $DG(P_2)$ tal que

$$L^{-1} \cdot DG(P_2) \cdot L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

on λ_1 i λ_2 estan donats a la prova de la Proposició 5.3.2, de tal manera que l'aplicació

$$F(r, s) = H^{-1} \circ \tilde{G} \circ H(r, s) \quad (5.4.4)$$

té la forma (5.4.2). Òbviament, l'aplicació F és conjugada a G a partir dels canvis lineals i la translació indicada anteriorment. Calculant el polinomi de Taylor de grau 5 de l'aplicació F i fent servir el Lema 5.4.2, obtenim:

L'expressió de la varietat local inestable $W_{\text{loc}}^u(0, 0)$ per l'aplicació F , descrita a (5.4.4), és $s = w(r) = w_2 r^2 + w_3 r^3 + w_4 r^4 + w_5 r^5 + O(r^6)$, on els coeficients w_i per $1 \leq i \leq 5$ venen donats per les aproximacions següents:

$$\begin{aligned} w_2 &\simeq -0.00259107002218996975513519324145, \\ w_3 &\simeq -0.00013220529650666650558465802906, \\ w_4 &\simeq -0.00000889870356674847560384348601, \\ w_5 &\simeq -0.00000069374812274441343473691330. \end{aligned}$$

Aquests coeficients han estat calculats usant aritmètica amb coma flotant amb 60 Dígitos a la mantissa, usant Maple v.17.

Observem que podem parametritzar la varietat local inestable $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ de l'aplicació G , usant l'expressió de la funció $s = w(r)$ i, a partir de

$$r \longrightarrow H(r, w(r)) + P_2, \quad (5.4.5)$$

per $r \simeq 0$. Aquesta parametrització serveix, per exemple per a obtenir la gràfica de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ que es presenta a les Figures 5–7.

Observem, també, que fent l'anterior translació a l'origen, el canvi lineal H^{-1} , i fent servir l'expressió de la varietat local inestable de l'origen per l'aplicació F , $s = w(r)$, obtenim que els punts $(a, b) \in W_{\text{loc}}^u(P_2)$ es troben sobre la corba:

$$w(H_1^{-1}(a - a_2, b - b_2)) - H_2^{-1}(a - a_2, b - b_2) = 0, \quad (5.4.6)$$

Amb aquesta equació, l'aproximació $s = w(r) \simeq w_2 r^2 + w_3 r^3 + w_4 r^4 + w_5 r^5$ i, els coeficients calculats anteriorment, tenim l'aproximació de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ donada per la corba

$$D_1(a, b) := \left(\sum_{i=2}^5 w_i (H_1^{-1}(a - a_2, b - b_2))^i \right) - H_2^{-1}(a - a_2, b - b_2) = 0, \quad (5.4.7)$$

on

$$\begin{aligned} D_1(a, b) = & -4.03813692611580684360338774140003064287122780032151577446352 \\ & +0.136835570187356692856292874844616173322714151114562298091713 a \\ & +1.16002518397777258692909748484305827581995202504056071114488 b \\ & +0.00451794391634879027919696421923325477740984236727568450513428 a^2 \\ & +0.00409685032271073053937942926572911428561886769448101735204584 ba \\ & +0.000928751157465633060586506597514639158495251702775404020843218 b^2 \\ & +0.000314219487598906197388989706556177162012577685241932648849536 a^3 \\ & +0.000427399133214095481986961416228635362076980680818093595674363 ba^2 \\ & +0.000193781763259417494302458955052914221707109774750592260660870 b^2 a \\ & +0.0000292867321228425427310154290704202539612572313632211300875158 b^3 \\ & +0.0000219502028186999938498211237926664466925785277754069994436419 a^4 \\ & +0.0000398086816332292940854654258496348906329566730805853026618170 ba^3 \\ & +0.0000270737441437055379946620703014141150271010228032946287117661 b^2 a^2 \\ & +0.00000818344800834138722835364347139600550440076494046229497012338 b^3 a \\ & +9.27589027072144189812333028604017649205494002382005125870684 \cdot 10^{-7} b^4 \\ & +9.06487980720727916381704382754171493612871886481350259549486 \cdot 10^{-7} a^5 \\ & +0.00000205499760793312566433225722866840842667772990911912618569332 ba^4 \\ & +0.00000186346217861741329706733536704027614850730489138520903346231 b^2 a^3 \\ & +8.44889375474776506488014912868081229417799228337504006896707 \cdot 10^{-7} b^3 a^2 \\ & +1.91535429315712367264921861628132278170425017734031896788163 \cdot 10^{-7} b^4 a \\ & +1.73683427667860284091305541304113689671706434710305069494374 \cdot 10^{-8} b^5. \end{aligned}$$

Càlcul del punt homoclínic

Hem observat gràficament que, excepte el propi punt P_2 , no hi ha cap intersecció de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ amb la corba L_2 , que com hem vist forma part del conjunt estable de P_2 . Així mateix tampoc no hem observat cap intersecció de $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ amb $R_1 = \{a - b = 0\}$ a la regió C_1 . Recordem que els punts $(a, b) \in R_1 \cup C_1$ són tals que $G(a, b) \in L_2$, i per tant formen part del conjunt estable de P_2 . Tampoc hem observat punts $(a, b) \in W_{\text{loc}}^u(P_2)$ tals que $G(a, b) \in R_1 \cup C_1$, però sí tals que $G^2(a, b) \in R_1 \cup C_1$. Vegeu la Figura 5.

Imposant $G_1(a, b) - G_2(a, b) = 0$, obtenim que els punts (a, b) tals que $G(a, b) \in R_1$ satisfan:

$$D_2(a, b) := 5a + 5b + ab + 9 - (a + b + 6) \sqrt[3]{(a + b + 2)^2} = 0,$$

o equivalentment,

$$\widetilde{D}_2(a, b) := (ab + 5a + 5b + 9)^3 - (a + b + 6)^3(a + b + 2)^2 = 0.$$

Així doncs, els punts tals que $G^2(a, b) \in R_1$ són aquells que compleixen que $\widetilde{D}_2(G(a, b)) = 0$, o equivalentment

$$D_3(a, b) := \text{numer}(\widetilde{D}_2(G(a, b))) = 0.$$

Aquesta corba, ens dóna un polinomi de grau 10 en la variable $m = (a + b + 2)^{2/3}$ amb 22 termes, el qual ometem per la seva longitud.

Així doncs, el punt P que busquem, haurà de verificar el sistema format per les dues condicions $\{D_1(a, b) = 0, D_3(a, b) = 0\}$. Resolent-lo numèricament amb el programari Maple v.17, usant novament aritmètica en coma flotant amb 60 dígits, obtenim una solució a $[-6, -5] \times [3.5, 5]$, donada per $P = (p_1, p_2)$ on :

$$\begin{aligned} p_1 &\simeq -5.67750144031789435343891174392876990152177028290023619512062, \\ p_2 &\simeq 4.10574868714920935493626045239900450809925741194290963919902. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Com hem vist anteriorment, $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ es pot parametritzar usant (5.4.5). El punt P , es correspon a un valor del paràmetre

$$r \simeq -1.48202152087749433523.$$

A la figura següent hi veiem reflectida la posició de la solució anterior:

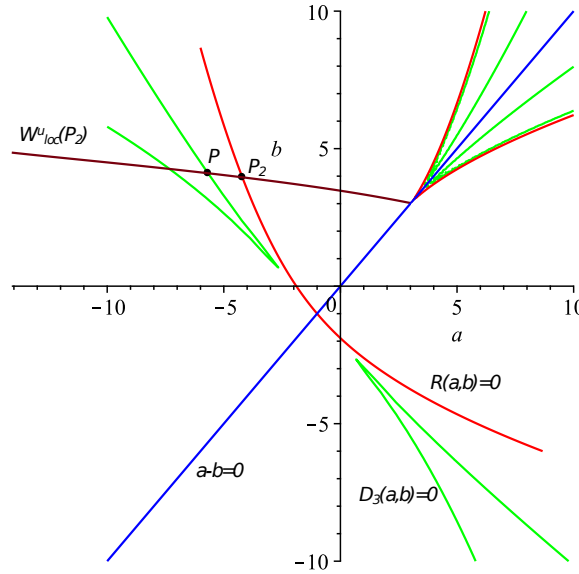


Figura 5. Components de la corba resolvent $L_1 \cup L_2$ en vermell; recta R_1 en blau i, la corba $D_3(a, b) = 0$ en verd. Punt P amb comportament homoclínic, pertanyent a la varietat local inestable i a $D_3(a, b) = 0$.

Un càlcul ens dona que $G(P) = (p_{1,1}, p_{1,2})$ on

$$p_{1,1} \simeq -68.6788618765184690558969073346185356000229055463240882141991,$$

$$p_{1,2} \simeq 7.79415087219783248439278214192477101393736189800549860008618,$$

i que $G^2(P) = (p_{2,1}, p_{2,2})$ on

$$p_{2,1} \simeq -3.62618271267761690173946685824088776337009026069317034579721,$$

$$p_{2,2} \simeq -3.62618271267761690173946685824088776337009026069317034579720.$$

Observem que l'error absolut que es comet quan avaluem $G^2(P)$ sobre l'expressió de la recta R_1 és $|p_{2,2} - p_{2,1}| = 10^{-59}$.

Un iterat més, ens dona el punt $G^3(P) = (p_{3,1}, p_{3,2})$ on

$$p_{3,1} \simeq -1.54573339270966888396791059138009853896768420271134822145653,$$

$$p_{3,2} \simeq -0.414471284250616130974922296290939858120865584675102319035549,$$

que es troba sobre la component L_2 de la corba resolvent. De fet, l'error absolut que es comet quan avaluem $G^3(P)$ sobre l'expressió de la corba $R(a, b) = 0$ definida per (5.2.1), és $|R(p_{3,1}, p_{3,2})| = 10^{-58}$.

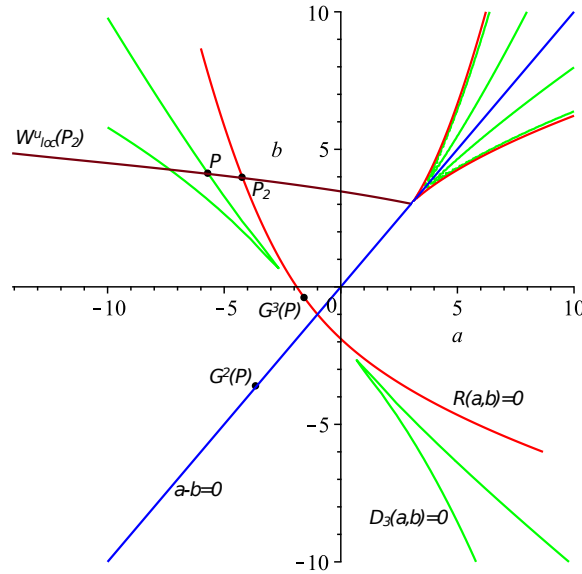


Figura 6. Localització dels punts P , $G^2(P)$ i $G^3(P)$ a $W^u_{\text{loc}}(P_2)$, la corba $D_3(a, b) = 0$ (en verd), la diagonal R_1 (en blau) i la corba resolvent (vermell), respectivament. El punt $G(P)$ queda fora de la imatge.

Tal i com hem vist a la Proposició 5.4.1, l'òrbita de qualsevol punt que estigui sobre la component L_2 de la corba resolvent, acaba convergint al punt de sella P_2 . En conseqüència, el punt P exhibeix, numèricament, un comportament homoclínic.

Tal i com s'observa les Figures 5 i 6, existeix també un altre punt solució del sistema $\{D_1(a, b) = 0, D_3(a, b) = 0\}$. Resolent-lo numèricament obtenim una solució a $[-8, -6] \times [3.5, 5]$ donada per $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ on :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &\simeq -7.32664831286596004531700787733138125161658087249633041273728, \\ \tilde{p}_2 &\simeq 4.26205920129322448141657538934356322617112224124511704493689.\end{aligned}\tag{5.4.9}$$

El punt \tilde{P} , es correspon a un valor del paràmetre

$$r \simeq -3.14702449177907104545.$$

Hem preferit mostrar P , i no \tilde{P} , com a possible punt homoclínic, donat que el seu valor del paràmetre és més proper a zero, i creiem que això dóna una major evidència que P pugui pertànyer a la varietat local inestable de P_2 , $W_{\text{loc}}^u(P_2)$.

Càlcul dels punts a $W_{\text{loc}}^u(P_2) \cap \mathcal{F}$

Seguidament, trobem un punt que es troba sobre de la varietat inestable $W_{\text{loc}}^u(P_2)$ tal que la seva òrbita cau al conjunt de no-definició \mathcal{F} . Primerament trobem un punt que verifica

$$\{D_1(a, b) = 0, a + b + 2 = 0\},$$

resolent les equacions amb Maple, obtenint el punt $Q = (q_1, q_2)$:

$$\begin{aligned}q_1 &\simeq -6.15163017029193114270539883292276699558057876233980350720282, \\ q_2 &\simeq 4.15163017029193114270539883292276699558057876233980350720282.\end{aligned}\tag{5.4.10}$$

En la parametrització (5.4.5), aquest punt correspon a un valor del paràmetre

$$r = -1.96025815386161687597.$$

Per tal de trobar un punt amb un valor menor del paràmetre, i que per tant, tinguem una major evidència que correspon a l'aproximació d'un punt sobre $W_{\text{loc}}^u(P_2)$, buscarem el punt Q_{-1} tal que $G(Q_{-1}) = Q$. Els punts (a, b) tals que $G(a, b) \in \Gamma$, verifiquen

$$D_4(a, b) := 5a + 5b + ab + 9 + (a + b + 6) \sqrt[3]{(a + b + 2)^2} + 2 \sqrt[3]{(a + b + 2)^4} = 0.$$

Així doncs, el punt que busquem serà solució del sistema

$$\{D_1(a, b) = 0, D_4(a, b) = 0\}.$$

Novament, resolent numèricament el sistema amb el programari Maple v.17, trobem la solució $Q_{-1} := (q_{-1,1}, q_{-1,2})$:

$$\begin{aligned}q_{-1,1} &\simeq -4.43931733951927306713914976146761550810750048579478327758904, \\ q_{-1,2} &\simeq 3.98185284365899589972467095578564600569428848801825836848384.\end{aligned}\tag{5.4.11}$$

La posició d'aquests punts està reflectida a la Figura 7.

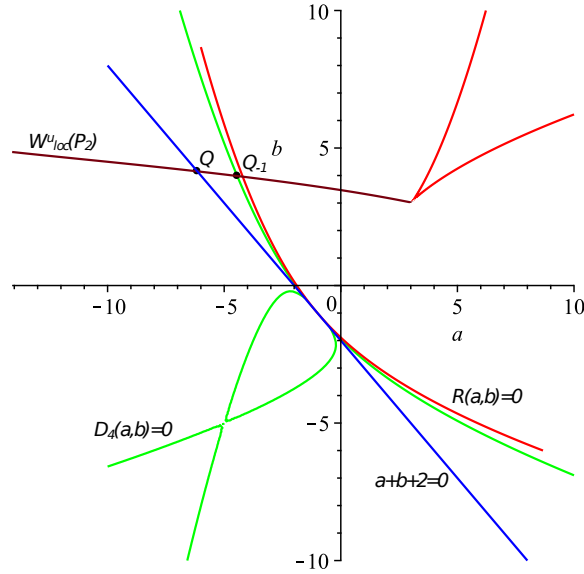


Figura 7. Localització dels punts Q i Q_{-1} a $W_{\text{loc}}^u(P_2) \cap \mathcal{F}$, la corba $D_4(a, b) = 0$ (en verd), la recta de no-definició $a + b + 2 = 0$ (en blau) i la corba resolvent (vermell), respectivament.

El punt Q_{-1} correspon a un valor del paràmetre

$$r \simeq -0.23505956788542861108.$$

Un càlcul ens mostra que l'error relatiu

$$\frac{\|G(Q_{-1}) - Q\|}{\|Q\|} \cdot 100 \simeq 5.249 \cdot 10^{-5}\%,$$

per la qual cosa, pensem que Q_{-1} és efectivament una bona aproximació d'una preimatge per G del punt Q .

Observem que els paràmetres dels punts Q , P , i Q_{-1} estan intercalats, la qual cosa implica que la seva posició també està intercalada a $W_{\text{loc}}^u(P_2)$. Una demostració analítica de l'existència d'aquests punts demostraria que arbitràriament a prop de P_2 hi ha punts homoclínics i punts del conjunt de no-definició \mathcal{F} .

Capítol 6

Apèndixs

6.A Zeros de famílies de polinomis en un paràmetre

El Lema 3.4.9, s'obté com a combinació dels dos resultats següents, desenvolupats a [44] i [45], que permeten determinar el nombre d'arrels d'un polinomi que depèn d'un paràmetre.

Sigui $G_b(x)$ una família de polinomis en un paràmetre. Denotem de la manera usual $\Delta_x(P)$ al discriminant del polinomi $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, és a dir,

$$\Delta_x(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{a_n} \text{Res}(P(x), P'(x); x),$$

on $\text{Res}(P(x), P'(x); x)$ és la resultant de P i de P' .

Lema A. [44] *Sigui*

$$G_b(x) = g_n(b)x^n + g_{n-1}(b)x^{n-1} + \cdots + g_1(b)x + g_0(b),$$

una família de polinomis reals depenent a la seva vegada polinòmicament d'un paràmetre real b i, sigui $\Omega = \mathbb{R}$. Supposem que existeix un interval obert $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

- (i) *Existeix un $b_0 \in I$, de manera que $G_{b_0}(x) > 0$ a Ω .*
- (ii) *Per tot $b \in I$, $\Delta_x(G_b) \neq 0$.*
- (iii) *Per tot $b \in I$, $g_n(b) \neq 0$.*

Aleshores per tot $b \in I$, $G_b(x) > 0$ a Ω .

Més encara, si $\Omega = \Omega_b = (c(b), \infty)$ per alguna aplicació diferenciable $c(b)$, el resultat es verifica canviant Ω per aquest conjunt nou Ω_b , sempre i quan hi afegim la següent hipòtesi addicional

(iv) Per tot $b \in I$, $G_b(c(b)) \neq 0$.

Lema B. [45] *Sigui*

$$G_b(x) = g_n(b)x^n + g_{n-1}(b)x^{n-1} + \cdots + g_1(b)x + g_0(b),$$

una família de polinomis reals depenent contínuament d'un paràmetre real b i, sigui $\Lambda_b = (c(b), d(b))$ on $c(b)$ i $d(b)$ són aplicacions contínues. Suposem que existeix un interval $I \subset \mathbb{R}$ tal que:

(i) Existeix un $b_0 \in I$, de manera que G_{b_0} té exactament r zeros simples a Λ_{b_0} .

(ii) Per tot $b \in I$, $G_b(c(b)) \cdot G_b(d(b)) \neq 0$.

(iii) Per tot $b \in I$, $\Delta_x(G_b) \neq 0$.

Aleshores per tot $b \in I$, $G_b(x)$ té exactament r zeros a Λ_b i tots ells són simples.

6.B Resultats generals de combinatòria

En aquest apartat recollim els lemes que hem necessitat a la demostració del Teorema 4.4.5. Concretament, són els Lemes D i F, els quals ens han estat útils per simplificar el denominador de (4.4.4) i obtenir així una expressió clara del terme de grau màxim per a la seva posterior normalització.

Els altres dos lemes que s'hi veuen recollits, són previs i necessaris per la demostració dels que ens interessen.

Lema C. *Siguin k, N enters positius amb $k \leq N$. Aleshores:*

$$\sum_{j=0}^{N-k} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} = \binom{2N-k}{k} 4^{N-k}.$$

Demostració. Multipliquem la part esquerra de la fórmula del lema per x^k i sumem sobre k per tal d'obtenir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{N-k} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} x^k &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{N-j} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} x^k \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} \sum_{k=0}^{N-j} \binom{N-j}{k} x^k \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} (x+1)^{N-j}. \end{aligned}$$

En aquest últim pas, ens fixem que al desenvolupar el sumatori, només ens apareixen els termes parells, per tant, tot sembla indicar que aquest resultat s'obté restant dues potències idèntiques de binomis de diferent signe (de manera similar a com hem vist en la demostració del Teorema 4.4.5). De fet, comprovem que:

$$\sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} (x+1)^{N-j} = \frac{(1 + \sqrt{x+1})^{2N+1} - (1 - \sqrt{x+1})^{2N+1}}{2\sqrt{x+1}}. \quad (6.B.1)$$

Ara bé, usant el resultat següent (veure [91, pàg.54]):

$$\frac{1}{\sqrt{1-4y}} \left(\frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2y} \right)^i = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+i}{k} y^k,$$

i tenint en compte que $x = -4y$ i $i = 2N + 1$, si l'apliquem a la segona part del numerador de l'expressió (6.B.1), obtenim:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+2N+1}{k} \left(\frac{-x}{4}\right)^k &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1-\sqrt{1+x}}{2\left(\frac{-x}{4}\right)}\right)^{2N+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1-\sqrt{1+x}}{\frac{-x}{2}}\right)^{2N+1} \\ &= \frac{(-2)^{2N+1} (1-\sqrt{1+x})^{2N+1}}{x^{2N+1} \sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^{2N+2} (1-\sqrt{1+x})^{2N+1}}{2x^{2N+1} \sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} \frac{(1-\sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+2N+1}{k} \left(\frac{-x}{4}\right)^k x^{2N+1} (-1)^{\frac{1}{2^{2N+2}}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+2N+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} \frac{1}{2^{2N+2} 2^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+2N+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} (2^{2(N+k+1)})^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k+2N+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} 4^{-(N+k+1)}. \end{aligned}$$

Així doncs,

$$\frac{(1-\sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2N+2k+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} 4^{-(N+k+1)}. \quad (6.B.2)$$

De la mateixa manera, ho apliquem a la primera part del numerador de l'expressió (6.B.1), tenint en compte que $x = -4y$ i $i = -2N - 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k-2N-1}{k} \left(\frac{-x}{4}\right)^k &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1-\sqrt{1+x}}{2\left(\frac{-x}{4}\right)}\right)^{-2N-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{1-\sqrt{1+x}}{\frac{-x}{2}}\right)^{-2N-1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{\frac{-x}{2}}{1-\sqrt{1+x}}\right)^{2N+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{-x(1+\sqrt{1+x})}{2(1-(1+x))}\right)^{2N+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{(1+\sqrt{1+x})^{2N+1}}{2^{2N+1}}. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
 \frac{(1 + \sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k-2N-1}{k} (-1)^k 4^{-k} 2^{2N} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k-2N-1}{k} (-1)^k 4^{N-k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k-2N-1}{k-2N-1} (-1)^k 4^{N-k} x^k \\
 &= \sum_{s=-2N-1}^{\infty} \binom{2s+2N+1}{s} (-1)^{s+1} 4^{-(N+1+s)} x^{2N+1+s}.
 \end{aligned}$$

Així doncs,

$$\frac{(1 + \sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} = \sum_{k=-2N-1}^{\infty} \binom{2N+2k+1}{k} (-1)^{k+1} 4^{-(N+1+k)} x^{2N+1+k}. \quad (6.B.3)$$

Per tant, usant (6.B.2) i (6.B.3) a (6.B.1), obtenim:

$$\begin{aligned}
 \frac{(1 + \sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} - \frac{(1 - \sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} &= \frac{(1 + \sqrt{1+x})^{2N+1} - (1 - \sqrt{1+x})^{2N+1}}{2\sqrt{1+x}} \\
 &= \sum_{k=-2N-1}^{\infty} \binom{2N+2k+1}{k} (-1)^{k+1} 4^{-(N+1+k)} x^{2N+1+k} \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2N+2k+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} 4^{-(N+k+1)} \\
 &= \sum_{k=-2N-1}^{-1} \binom{2N+2k+1}{k} (-1)^{k+1} x^{2N+k+1} 4^{-(N+k+1)} \\
 &= \sum_{s=0}^{2N} \binom{-(2N+1-2s)}{s} (-1)^{-2N+s} x^s 4^{-(s-N)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{2N} \binom{-(2N+1-2k)}{k} (-1)^k x^k 4^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N-k}{k} (-1)^k x^k 4^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^N (-1)^{2k} \binom{2N-k}{k} 4^{N-k} x^k = \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{k} 4^{N-k} x^k.
\end{aligned}$$

Finalment doncs, hem aconseguit:

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^{N-k} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} x^k = \sum_{k=0}^N \binom{2N-k}{k} 4^{N-k} x^k.$$

Si obviem el primer sumatori sobre k i dividim per x^k a ambdós costats, acabem demostrant el lema que ens ocupava:

$$\sum_{j=0}^{N-k} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} = \binom{2N-k}{k} 4^{N-k}.$$

■

Lema D. *Sigui $N \in \mathbb{N}$. Aleshores:*

$$\sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} (1+z^2)^{N-j} = \sum_{j=0}^N \binom{N+j}{2j} 4^j z^{2(N-j)}.$$

Demostració. Per demostrar el resultat comprovarem que els coeficients d'un terme qualsevol de la dreta coincideixen amb els de l'esquerra. Concretament, anem a buscar el coeficient de z^{2k} per $k \leq N$ de la part esquerra de la fórmula del lema, que desenvolupat té l'aspecte següent:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} (1+z^2)^{N-j} &= \binom{2N+1}{0} (1+z^2)^N + \binom{2N+1}{2} (1+z^2)^{N-1} \\
&+ \cdots + \binom{2N+1}{2N} (1+z^2)^0.
\end{aligned}$$

Fixem-nos que com $k \leq N$, després de desenvolupar-ho tot pel Binomi de Newton, ens apareixerà un exponent k en tots els sumands, donat que:

$$(1 + z^2)^{N-j} = \sum_{s=0}^{N-j} \binom{N-j}{s} z^{2s},$$

de fet, sempre hi haurà algun terme amb z^{2k} , per tant el coeficient de z^{2k} del costat esquerra de la fórmula del lema tindrà l'aspecte següent:

$$\sum_{j=0}^{N-k} \binom{2N+1}{2j} \binom{N-j}{k} = \binom{2N-k}{k} 4^{N-k},$$

on hem aplicat el Lema C en la darrera igualtat.

De manera anàloga, anem a estudiar el coeficient de z^{2k} del costat dret de la fórmula del lema. Si volem aquest coeficient, és necessari que $N-j = k$, per tant que $j = N-k$. Així doncs, el coeficient seria:

$$\binom{N+N-k}{2(N-k)} 4^{N-k} = \binom{2N-k}{2N-2k} 4^{N-k} = \binom{2N-k}{k} 4^{N-k}.$$

Com el coeficient de z^{2k} coincideix a ambdós costats i, ho hem demostrat per un $k \leq N$ qualsevol, voldrà dir que per tot $k \leq N$ es verifica:

$$\sum_{j=0}^N \binom{2N+1}{2j} (1+z^2)^{N-j} = \sum_{j=0}^N \binom{N+j}{2j} 4^j z^{2(N-j)}.$$

■

Lema E. *Siguin $k, N \in \mathbb{N}$ amb $k \leq N$. Aleshores:*

$$\sum_{j=0}^k \binom{2N}{2j} \binom{N-j}{N-k} = \frac{2^{2k-1}N}{k} \binom{k+N-1}{N-k}.$$

Aquest resultat es podria demostrar de manera similar al Lema C, per la qual cosa no repetirem el procés. O bé, es podria fer usant un mètode alternatiu, tal i com es pot consultar a [17, pàg.18].

Lema F. *Siguin $p \in \mathbb{N}$, d_1, d_2, \dots, d_p paràmetres i, definim $d_{p+1} := 1$.*

Aleshores:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} z^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+z^2)^{p-k-j} = \\ & \left(\sum_{j=1}^{p+1} d_j \right) z^{2p} + \sum_{i=1}^p 2^{2i-1} z^{2(p-i)} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right). \end{aligned}$$

Demostració. Per demostrar aquest resultat usarem la mateixa tècnica que hem vist en el Lema D, és a dir comprovarem com són els coeficients del polinomi a ambdós costats de la igualtat que volem provar. Primerament, estudiem el coeficient de z^{2i} de la dreta, per $0 \leq i \leq p-1$ (que es trobarà en el segon sumand). Concretament, el coeficient de z^{2p-2i} ve donat per:

$$2^{2i-1} \left(\sum_{j=1}^{p+1-i} \frac{j+i-1}{i} \binom{j+2i-2}{j-1} d_{j+i} \right), \quad (6.B.4)$$

on considerant el canvi de variable $2p-2i=2k$ ens dóna:

$$(6.B.4) = 2^{2(p-k)-1} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{j+p-k-1}{p-k} \binom{j+2p-k-1}{j-1} d_{j+p-k}. \quad (6.B.5)$$

Prenent $j = r + k - p$, arribem a:

$$\begin{aligned} (6.B.5) &= 2^{2(p-k)-1} \sum_{r=1+p-k}^{p+1} \frac{r-1}{p-k} \binom{r-k+p-2}{r+k-p-1} d_r \\ &= 2^{2(p-i)-1} \sum_{r=1+p-i}^{p+1} \frac{r-1}{p-i} \binom{r+p-i-2}{r-p+i-1} d_r \\ &= \frac{2^{2(p-i)-1}}{p-i} \sum_{r=1+p-i}^{p+1} (r-1) \binom{r+p-i-2}{r-p+i-1} d_r. \end{aligned}$$

En canvi quan $i = p$, el coeficient de $z^{2p} = z^{2i}$ ens dóna el primer terme, el primer sumand, és a dir,

$$\sum_{j=1}^{p+1} d_j = d_1 + \dots + d_{p+1} = d_1 + \dots + d_p + 1 = 1 + \sum_{j=1}^p d_j.$$

Anem ara a estudiar el coeficient z^{2i} de l'esquerra, per fer-ho estudiem com actua la funció per valors petis de la p , per exemple comencem amb $p = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 d_{2-k} z^{2k} \sum_{j=0}^{1-k} \binom{2-2k}{2j} (1+z^2)^{1-k-j} &= d_2 \left(\binom{2}{0} (1+z^2) + \binom{2}{2} (1+z^2)^0 \right) + d_1 z^2 \\ &= \left(d_2 \binom{2}{0} + d_2 \binom{2}{2} \right) + \left(d_2 \binom{2}{0} + d_1 \right) z^2. \end{aligned}$$

Per $p = 2$, de manera anàloga:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 d_{3-k} z^{2k} \sum_{j=0}^{2-k} \binom{4-2k}{2j} (1+z^2)^{2-k-j} &= d_3 \left(\binom{4}{0} (1+z^2)^2 + \binom{4}{2} (1+z^2) + \binom{4}{4} (1+z^2)^0 \right) \\ &+ d_2 z^2 \left(\binom{2}{0} (1+z^2) + \binom{2}{2} (1+z^2)^0 \right) + d_1 z^4 \left(\binom{0}{0} (1+z^2)^0 \right). \end{aligned}$$

Veient aquests dos casos, hom pot observar que el coeficient màxim z^{2p} , el trobem sumant els coeficients de grau màxim que resulten de desenvolupar els respectius binomis de Newton que trobem en primer lloc. Concretament quan $k \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$ prenem el coeficient de grau màxim del desenvolupament del cas $j = 0$.

Per tant, el coeficient de z^{2p} de la banda esquerra ens dóna:

$$\begin{aligned} d_{p+1} \binom{p}{p} + d_p \binom{p-1}{p-1} + d_{p-1} \binom{p-2}{p-2} + \dots + d_1 \binom{0}{0} \\ = d_{p+1} + d_p + d_{p-1} + \dots + d_1 = 1 + \sum_{j=1}^p d_j. \end{aligned}$$

Així doncs, tenim que quan $i = p$, els coeficients de z^{2i} d'ambdós costats coincideixen. Altrament, per als valors de la i tals que $0 \leq i \leq p-1$, hi intervenen coeficients de tots els sumands (excepte evidentment de l'últim, que és el cas anteriorment estudiat). Observem que l'expressió de l'esquerra de la fórmula del lema, es pot desenvolupar com:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} z^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} (1+z^2)^{p-k-j} \\ = \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} z^{2k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} \sum_{r=0}^{p-k-j} \binom{p-k-j}{r} z^{2r} \\ = \sum_{k=0}^p d_{p+1-k} \sum_{j=0}^{p-k} \binom{2p-2k}{2j} \sum_{r=0}^{p-k-j} \binom{p-k-j}{r} z^{2(r+k)}. \end{aligned}$$

Si volem doncs el coeficient de $z^{2i} = z^{2(r+k)}$ per un k fixat, caldrà que $r+k=i$, i així $(p-k-j)+k=i$, o sigui que $p-j=i$. Per tant, el coeficient de z^{2i} vindrà donat

per:

$$d_{p+1-k} \sum_{j=0}^{p-i} \binom{2p-2k}{2j} \binom{p-k-j}{i-k} = d_{p+1-k} \sum_{j=0}^{p-i} \binom{2p-2k}{2j} \binom{p-k-j}{i-k},$$

on el sumatori arriba fins a $p-i$, doncs no n'intervenien de tots els sumands, atès que cada cop se'n va reduint el nombre. Altrament, quan busquem el coeficient de z^{2i} , no estem sumant per tots els d_k , sinó que el més gran és d_{p+1} i el més petit d_{p+1-i} . Això ens mostra doncs, que el coeficient que estem buscant és:

$$\sum_{k=0}^i d_{p+1-k} \sum_{j=0}^{p-i} \binom{p-2k}{2j} \binom{p-k-j}{i-k} = \sum_{r=p+1-i}^{p+1} d_r \sum_{j=0}^{p-i} \binom{2r-2}{2j} \binom{r-j-1}{r-1-p+i}. \quad (6.B.6)$$

On aplicant el Lema E a l'expressió (6.B.6), i tenint en compte que $k = p-i$ i $N = r-1$, ens acaba donant:

$$\sum_{r=p+1-i}^{p+1} d_r \frac{2^{2(p-i)-1}(r-1)}{p-i} \binom{p-i+r-2}{r-1-p+i} = \frac{2^{2(p-i)-1}}{p-i} \sum_{r=p+1-i}^{p+1} (r-1) \binom{r+p-i-2}{r-p+i-1} d_r.$$

Per tant, veiem que coincideix amb el coeficient trobat pel costat dret.

Així doncs, com tenim coincidència dels coeficients en ambdós costats, podem concloure la demostració de la igualtat de la fórmula que ens ocupava. ■

6.C El Teorema de Poincaré-Miranda

El Teorema de Poincaré-Miranda, és una extensió a \mathbb{R}^n del Teorema de Bolzano per funcions contínues en una dimensió, d'aquí que també sigui conegut com el Teorema de Bolzano n -dimensional. El resultat va ser enunciat per H. Poincaré el 1883 i el 1884 ([78, 79]) i demostrat el 1886 ([80]). El 1940, C. Miranda ([67]) el va re-obtenir com a formulació equivalent del Teorema del punt fix de Brouwer. Les demostracions més recents del teorema, que coneixem, es presenten a [58] i [90].

En aquest apèndix demostrarem amb detall la versió a \mathbb{R}^2 , tot repassant abans part de la teoria del grau topològic de Brouwer (veure [20] i [24] per més detalls), també reproduïm una adaptació de la demostració més senzilla que hem trobat per la versió a \mathbb{R}^n , donada per M. Vrahatis a [90].

6.C.1 Preliminars a \mathbb{R}

El conegut *Teorema de Bolzano* ens diu:

Teorema G. *Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, aleshores existeix algun element $c \in (a, b)$ que satisfà $f(c) = 0$.*

Si considerem el grau d'una aplicació $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) \neq 0$ si $x = a$ i $x = b$, definit com

$$\deg(f, (a, b)) = \begin{cases} +1 & \text{si } f(a) < 0 < f(b) \\ -1 & \text{si } f(b) < 0 < f(a) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \quad (6.C.1)$$

Aleshores podem reformular el Teorema de Bolzano tal i com segueix: *Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua tal que $\deg(f, (a, b)) \neq 0$, aleshores existeix algun element $c \in (a, b)$ que satisfà $f(c) = 0$.*

Observació 1. *Aquesta és la idea que volem traslladar a l'espai bidimensional, és a dir, enunciar el Teorema de Poincaré-Miranda, fent ús del grau d'una aplicació a \mathbb{R}^2 (el qual definim a l'apartat següent).*

Altrament, cal tenir en compte que si $f \in C^1[a, b]$ amb $f(a) \cdot f(b) \neq 0$, i tots els zeros de f són simples (és a dir, no anul·len la derivada), aleshores f té un nombre finit de zeros x_1, x_2, \dots, x_n . Això és degut al fet que $[a, b]$ és compacte i els zeros són aïllats. Així doncs, podem definir

$$\deg(f, (a, b)) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(f'(x_i)). \quad (6.C.2)$$

Observació 2. *Si la funció f no s'anul·la, entendrem llavors que la suma anterior val zero.*

6.C.2 Grau topològic a \mathbb{R}^2

El grau topològic és l'eina més útil i potent per provar l'existència de zeros d'una funció definida en un espai de dimensió finita més gran que 1. Des del punt de vista de la topologia, el grau topològic és un *comptador algebraic* del nombre de solucions de l'equació $f(x) = 0$, i per tal que sigui útil en les aplicacions, el grau d'una funció ha de ser invariant respecte petites pertorbacions (veure [24]). La clau consisteix a afegir a cada zero de la funció f un signe positiu o negatiu (veure (6.C.1)), obtenint així un nombre enter per al grau (per això diem que és un comptador algebraic del nombre de zeros).

Abans de definir l'índex d'una corba, necessari per entendre la noció de grau, recordem un parell de propietats relatives a les corbes que diuen així:

- (1) *Sigui $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ funció contínua. Aleshores, existeix una funció contínua $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

on $r(t) = \|\alpha(t)\|$ (amb la norma euclidiana), i tal que $\theta(t)$ és única llevat de multiplicitats tals com $\theta(t) = \theta(t + 2k\pi)$ per tot $k \in \mathbb{Z}$.

- (2) *Suposem que $\alpha_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ és una família de funcions contínues que convergeixen uniformement a la funció $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n(a) = \theta(a)$, aleshores θ_n convergeix uniformement a θ .*

Definició 1. *Donada una funció $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ contínua, definim l'índex de rotació de la corba $\alpha(t)$ al voltant de l'origen com*

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Observació 3. *Si la corba és tancada, és a dir $\alpha(a) = \alpha(b)$, aleshores l'índex de rotació és un nombre enter. Si el resultat és $+k$ ens està dient que la corba dóna k voltes al voltant de l'origen en el sentit de les agulles del rellotge, mentre que si el resultat és $-k$, voldrà dir que dóna k voltes en sentit antihorari.*

Definició 2. *Sigui Ω un domini de Jordan a \mathbb{R}^2 amb Γ com a corba de Jordan. Suposem que $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ és una parametrització positiva de Γ tal que $\alpha(0) = \alpha(1)$, $\alpha|_{(0,1)}$ és bijectiva i $\alpha([0, 1]) = \Gamma$. Aleshores donada la funció $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ contínua tal que $f(x) \neq 0$ per tot $x \in \partial\Omega = \Gamma$, es defineix $\deg(f, \Omega)$ com l'índex de rotació de $f \circ \alpha$ al voltant de l'origen.*

Observació 4. Una corba de Jordan Γ és una corba tancada simple de \mathbb{R}^2 . Aleshores $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ té dues components connexes, una fitada i l'altre no, que tenen Γ com a frontera comuna. Anomenarem domini de Jordan tot conjunt obert, connex i fitat del pla que té per frontera una corba de Jordan.

Exemple 1. Considerem $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disc unitat tancat i, la seva frontera $\partial\Omega = \Gamma$, el cercle unitat. Sigui $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ la parametrització positiva de Γ satisfent totes les propietats anteriors, i la funció $f(z) = z^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Aleshores es comprova que $f(\alpha(t)) = e^{2\pi int}$ i per tant $\deg(f, \Omega) = n$.

Observació 5. La propietat de continuïtat uniforme anteriorment enunciada, ens assegura també la continuïtat del grau. És a dir, donades $f_n : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ funcions contínues amb $f_n(x) \neq 0$ i $f(x) \neq 0$, per tot $x \in \partial\Omega$ tals que f_n convergeix uniformement a f a $\partial\Omega$, aleshores

$$\deg(f_n, \Omega) \text{ convergeix uniformement a } \deg(f, \Omega).$$

Hi ha moltes maneres d'introduir la noció del grau a \mathbb{R}^n ($n = 2$, en el nostre cas). Es pot fer usant tècniques de topologia algebraica, tal i com acabem de veure, fent servir grups d'homologia o, seguint un enfocament més analític. Tot i així, no té importància la manera que escollim, donat que tal i com ens indica el següent teorema ([37, Teorema 1.1 i Teorema 3.1]) només existeix una única aplicació que verifica les tres propietats indicades, les quals ens permeten definir el grau axiomàticament.

Teorema H. Sigui $\Sigma = \{(f, \Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ un domini de Jordan, } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ contínua i } 0 \notin f(\partial\Omega)\}$. Existeix una única aplicació $\deg : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$ anomenada grau de Brouwer, que satisfà les següents propietats:

- (a) Propietat de normalització. Si $0 \in \Omega$ aleshores $\deg(\text{Id}, \Omega) = 1$.
- (b) Propietat additiva. Si Ω_1 i Ω_2 són subconjunts oberts disjunts de Ω i $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, aleshores $\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1) + \deg(f, \Omega_2)$.
- (c) Invariant per homotopies. Si $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua i $0 \notin h(t, \partial\Omega)$ per tot $t \in [0, 1]$, aleshores $\deg(h(t, \cdot), \Omega)$ és independent del valor de t .

Observació 6. La primera propietat fixa el valor del grau de l'aplicació Identitat. La segona, ens serveix per demostrar la multiplicitat i localització de les solucions de l'equació $f(x) = 0$. Finalment, la tercera propietat implica que si f i g són aplicacions homòtopes (és a dir, existeix una funció $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua tal que $h(0, \cdot) = f$ i $h(1, \cdot) = g$) i a més a més, cap zero travessa la frontera durant l'homotopia, és a dir

$$h(t, x) \neq 0 \text{ per tot } t \in [0, 1] \text{ i } x \in \partial\Omega,$$

aleshores $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$. Aquesta és sens dubte, una de les propietats del grau que més es fa servir.

Proposició I (Vegeu [37], per exemple). *Sigui Ω un domini de Jordan. L'aplicació grau de Brouwer $\deg : \Sigma \longrightarrow \mathbb{Z}$ també satisfà les següents propietats:*

(a) Propietat d'existència. *Si $\deg(f, \Omega) \neq 0$ aleshores existeix $x \in \Omega$ tal que $f(x) = 0$.*

(b) Propietat de dependència dels valors a la frontera. *Si $f(x) = g(x)$ per tot $x \in \partial\Omega$ aleshores $\deg(f, \Omega) = \deg(g, \Omega)$.*

(c) Propietat d'escissió. *Si $\Omega_1 \subset \Omega$ és un obert i $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ aleshores*

$$\deg(f, \Omega) = \deg(f, \Omega_1).$$

(d) Propietat del grau de les aplicacions lineals invertibles. *Si $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és lineal amb $\det(A) \neq 0$ i $0 \in \Omega$ aleshores*

$$\deg(A, \Omega) = \text{sign}(\det(A)).$$

Observació 7. *Com ja hem comentat abans, la propietat d'existència és la que ens donarà més joc, doncs ens garanteix l'existència de solució pel sistema d'equacions $f(x) = 0$.*

6.C.3 Grau topològic de Brouwer, o grau topològic a \mathbb{R}^n

En aquesta secció, estendrem la noció del grau exposada abans, a situacions més generals. Més concretament, considerarem f una funció contínua de n variables independents i n components i, els intervals o dominis de Jordan els substituïrem per qualsevol subconjunt obert i acotat de \mathbb{R}^n . La definició del concepte a \mathbb{R}^n , la farem en diversos passos.

Primerament, denotem per σ al conjunt format per les tripletes (f, Ω, \mathbf{y}) tals que Ω és un conjunt obert acotat de \mathbb{R}^n (on n és fix), $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$.

Primer pas. Sigui $(f, \Omega, \mathbf{y}) \in \Sigma$ tal que $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Sigui

$$A_f = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\} \quad \text{i} \quad B_f = \{\mathbf{x} \in \Omega : J_f(\mathbf{x}) = 0\},$$

on $J_f(\mathbf{x}) = \det Df(\mathbf{x})$ és el Jacobiana de l'aplicació f a \mathbf{x} , suposarem en aquest primer pas que $A_f \cap B_f = \emptyset$. Aleshores A_f és un conjunt finit (atès que A_f és un compacte amb tots els seus punts aïllats), la qual cosa ens permet definir

$$\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in A_f} \text{sign} J_f(\mathbf{x}).$$

On entenem que si $A_f = \emptyset$, aleshores $\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) = 0$ per definició.

Segon pas. Aquí eliminarem la hipòtesis $A_f \cap B_f = \emptyset$. Ara bé, caldrà que $(f, \Omega, \mathbf{y}) \in \Sigma$ verifiqui també que $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Per a fer-ho, usarem el *Teorema de Sard* [66, §3], el

qual ens afirma que donada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicació diferenciable, amb U un obert de \mathbb{R}^n i, essent C el conjunt dels punts crítics, és a dir, el conjunt de tots els $\mathbf{x} \in U$ amb $\text{rang}(Df(\mathbf{x})) < p$, aleshores, $f(C) \subset \mathbb{R}^p$ té mesura de Lebesgue igual a zero. Usant aquest resultat, tenim que $f(B_f)$ té mesura zero i per tant el seu interior és buit, la qual cosa ens garanteix encara que \mathbf{y} no sigui un punt regular, dins la bola oberta a \mathbb{R}^n de centre \mathbf{y} i radi r , $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{y}; r)$, on $r = \text{dist}(\mathbf{y}, f(\partial\Omega))$, existeix almenys un element z tal que (f, Ω, z) verifica les hipòtesis del primer pas. Es prova llavors, que $\deg(f, \Omega, z)$ és independent de l'element z escollit i, es defineix $\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) := \deg(f, \Omega, z)$.

Tercer pas. En aquest pas, eliminarem la hipòtesi sobre la regularitat de l'aplicació f . Per a fer-ho, agafarem $(f, \Omega, \mathbf{y}) \in \Sigma$ i $r = \text{dist}(\mathbf{y}, f(\partial\Omega))$. El *Teorema d'aproximació de Weierstrass* ens garanteix l'existència d'una aplicació $g \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < r$, per tot $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, on $|\cdot|$ indica la norma euclidiana a \mathbb{R}^n . Pot provar-se aleshores que $\deg(g, \Omega, \mathbf{y})$ és independent de la funció g escollida satisfent l'anterior condició i, es defineix $\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) := \deg(g, \Omega, \mathbf{y})$.

Les consideracions donades en els tres passos anteriors, ens permeten enunciar resultats similars als donats al Teorema H i a la Proposició I, donats a \mathbb{R}^2 .

Teorema J. *Existeix una única aplicació $\deg : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfent les propietats següents:*

(a) Propietat de normalització.

$$\deg(\text{Id}, \Omega, \mathbf{y}) = 1, \text{ si } \mathbf{y} \in \Omega.$$

(b) Propietat additiva. *Si Ω_1 i Ω_2 són dos subconjunts oberts i disjunts de Ω tals que $\mathbf{y} \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, aleshores*

$$\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) = \deg(f, \Omega_1, \mathbf{y}) + \deg(f, \Omega_2, \mathbf{y}).$$

(c) Invariant per homotopies. *Si $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, són aplicacions contínues tals que $\mathbf{y}(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, per tot $t \in [0, 1]$, aleshores $\deg(h(t, \cdot), \Omega, \mathbf{y}(t))$ és independent del $t \in [0, 1]$ escollit.*

(d) Propietat d'existència. *Si $\deg(f, \Omega, \mathbf{y}) \neq 0$, aleshores l'equació $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ té almenys una solució a Ω .*

A l'aplicació $\deg(f, \Omega, \mathbf{y})$ enunciada al teorema, se l'anomena *grau topològic de Brower de f , relatiu a Ω i a \mathbf{y}* , i la podríem arribar a entendre com una funció indicadora del nombre de solucions de l'equació $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ a Ω .

Observació 8. *La propietat (a) fixa el valor del grau per l'aplicació Identitat. La propietat (b) expressa el fet de que per calcular el grau $\deg(f, \Omega, \mathbf{y})$ es pot prescindir d'aquelles parts del domini on es té constància que l'equació $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ no té solució. La propietat*

(c) en canvi, expressa la igualtat de graus a Ω per aplicacions homotòpiques contínues $h(0, \cdot)$ i $h(1, \cdot)$, relatives a $\mathbf{y}(0)$ i a $\mathbf{y}(1)$ respectivament, sempre que la família d'equacions $h(t, \mathbf{x}) = \mathbf{y}(t)$, per $t \in [0, 1]$, no tingui solució a $\partial\Omega$. Finalment, la propietat (d) ens diu que una condició suficient per a l'existència de solucions per l'equació $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ a Ω , és que el grau $\deg(f, \Omega, \mathbf{y})$ no sigui zero.

6.C.4 Teorema de Poincaré-Miranda.

El teorema que enunciem en aquest apartat, és vàlid per a funcions f contínues definides en rectangles prenent valors a \mathbb{R}^2 . Afirmar que si cada component f_i de f , pren valors de signe oposat en els i -èssims costats oposats, aleshores l'equació $f(x, y) = (0, 0)$ té solució a l'interior del rectangle. Per tant, aquest teorema, conegut com a *Teorema de Poincaré-Miranda*, es pot considerar com una generalització del Teorema de Bolzano en diverses variables:

Teorema K. *Sigui $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ i $f = (f_1, f_2) : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una funció contínua tal que*

$$f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y) \text{ per tot } y \in [c, d],$$

$$f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d) \text{ per tot } x \in [a, b].$$

Aleshores l'equació $f(x, y) = (0, 0)$ té almenys una solució a $(a, b) \times (c, d)$.

Observació 9. *Si ens fixem en la condició donada al Teorema K, podem pensar que aquesta expressa una propietat global sobre el comportament de la funció f a la frontera de $[a, b] \times [c, d]$. De fet, fixem-nos que ens passava el mateix amb el Teorema de Bolzano per $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, on la condició $\text{sign}(f(b)) - \text{sign}(f(a)) \neq 0$ ens permetia afirmar que l'equació $f(x) = 0$ tenia solució a l'interval (a, b) .*

La demostració que presentem és essencialment la que apareix a [90], tot i que també es pot consultar [74].

Demostració del Teorema K. Per demostrar el Teorema K veurem que existeix una certa homotopia contínua entre l'aplicació f i l'aplicació Identitat, Id.

De la mateixa manera que al Teorema de Bolzano no era restrictiu suposar que $a < 0 < b$ i $f(a) < 0 < f(b)$, al Teorema de Poincaré-Miranda suposarem, a més de les condicions donades a l'enunciat

$$f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y) \text{ per tot } y \in [c, d],$$

$$f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d) \text{ per tot } x \in [a, b],$$

que també es compleix $a < 0 < b$ i $c < 0 < d$.

Considerem doncs $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ i definim l'aplicació

$$H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad H(t, \mathbf{x}) = t\mathbf{x} + (1 - t)f(\mathbf{x}).$$

Usant totes les condicions enunciades anteriorment, es dedueix que

$$H(t, \mathbf{x}) \neq 0, \quad \text{per tot } t \in [0, 1], \quad \text{per tot } \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

i a més a més, es verifica que

$$H(0, \cdot) = f \quad \text{i} \quad H(1, \cdot) = \text{Id}.$$

Tenim doncs una homotopia entre la funció f i l'aplicació Identitat, que no permet que cap zero de $H(t, \mathbf{x}) = 0$, per $t \in (0, 1)$, travessi la frontera de Ω . Així doncs, per la propietat de la invariància del grau per homotopies i la propietat de normalització (donades al Teorema H) tenim que $\deg(f, \Omega) = \deg(\text{Id}, \Omega) = 1 \neq 0$. Finalment doncs, per la propietat d'existència del grau (donada a la Proposició I), existeix $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $f(\mathbf{x}) = 0$, és a dir, la funció f té almenys un zero a l'interior de Ω . ■

El següent exemple és una adaptació dels que es presenten a [20] i [83].

Exemple 6.C.1. Sigui $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$, un domini de Jordan i, $f = (f_1, f_2) : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una funció contínua donada per les expressions següents:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^3 \cdot \cosh(x) + \sin(x^2 + y^2), \\ f_2(x, y) &= \sinh(y) + \cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Fixem-nos que es verifiquen les següents desigualtats:

$$\begin{aligned} f_1(-5, y) &= -125 \cosh(-5) + \sin(y^2 + 25) \leq -125 \cosh(-5) + 1 < 0, \\ f_1(5, y) &= 125 \cosh(5) + \sin(y^2 + 25) \geq 125 \cosh(5) - 1 > 0, \end{aligned}$$

per tant, tenim que $f_1(-5, y) < 0 < f_1(5, y)$ per tot $y \in [-5, 5]$.

Anàlogament, es compleix:

$$\begin{aligned} f_2(x, -5) &= \sinh(-5) + \cos(y^2 + 25) \leq \sinh(-5) + 1 < 0, \\ f_2(x, 5) &= \sinh(5) + \cos(y^2 + 25) \geq \sinh(5) - 1 > 0, \end{aligned}$$

és a dir, $f_2(x, -5) < 0 < f_2(x, 5)$ per tot $x \in [-5, 5]$. Així doncs, el Teorema de Poincaré-Miranda ens assegura que $f(x, y) = (0, 0)$ té almenys una solució a Ω .

A continuació adaptem la demostració de la versió n -dimensional del teorema que es presenta a [90]. La demostració fa servir la generalització del concepte de grau per aplicacions contínues a \mathbb{R}^n i de la Propietat d'existència assenyalada al Teorema J.

Teorema 6.C.2. *Sigui $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } |x_i| < L, \text{ per } 1 \leq i \leq n\}$ i suposem que l'aplicació $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ és contínua a la clausura de Ω , $\overline{\Omega}$. Suposem que $F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per tot $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ i que*

$$(i) \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

$$(ii) \quad f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n.$$

Aleshores existeix $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Demostració. La demostració seguirà la mateixa línia que la donada a \mathbb{R}^2 , tot construint una homotopia contínua entre l'aplicació F i la Identitat, Id. Considerem, doncs, l'homotopia $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida per

$$H(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x} + (1 - t)F(\mathbf{x}).$$

Demostrarem que $H(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$, per tot $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ i $t \in [0, 1]$ (primerament ho farem per $t = 0$ i per $t = 1$ i després per l'interior de l'interval): observem que $H(\mathbf{x}, 0) = F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ per tot $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, i que $H(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ja que $\mathbf{0} \notin \partial\Omega$. Observem, també, que $H(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$ per tot $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ i $t \in (0, 1)$, o equivalentment:

$$t(1 - t)^{-1}\mathbf{x} + F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \text{ per tot } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ i } t \in (0, 1). \quad (6.C.3)$$

En efecte, a partir de les hipòtesis, tenim que per $1 \leq i \leq n$ i per $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, almenys existeix un i tal que $x_i f_i(\mathbf{x}) > 0$. Tenint en compte que si $t \in (0, 1)$ aleshores $t \cdot (1 - t)^{-1} > 0$ obtenim (6.C.3).

Tenim, doncs, definida una homotopia entre la funció F i la Identitat, que no permet que cap zero de $H(t, \mathbf{x}) = 0$, per $t \in (0, 1)$, travessi la frontera de Ω . Així doncs, per les propietats de la invariància del grau per homotopies i la propietat de normalització, donades al Teorema J, obtenim que

$$\deg(F, \Omega, 0) = \deg(H(\cdot, 0), \Omega, 0) = \deg(H(\cdot, 1), \Omega, 0) = \deg(\text{Id}, \Omega, 0) = 1.$$

Aquest resultat, conjuntament amb la propietat d'existència donada al mateix Teorema J, ens afirma que existeix almenys un $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ tal que $F(\mathbf{x}) = 0$, tal i com volíem veure. ■

6.D Bases de Gröbner.

Una *base de Gröbner* és un cas particular de conjunt generador d'un ideal en un anell de polinomis sobre un cos $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (consultar [4, 89]). El fet de disposar d'una base de Gröbner permet deduir fàcilment moltes propietats importants de l'ideal i de la varietat algebraica associada, com la dimensió i el nombre de zeros quan és finita.

El concepte de les bases de Gröbner va ser introduït per Bruno Buchberger (1965) a la seva tesi doctoral, juntament amb un algoritme per calcular-les, conegut amb el nom d'algoritme de Buchberger. Les bases de Gröbner reben aquest nom pel matemàtic austríac Wolfgang Gröbner, tutor de Buchberger i, el seu càlcul és una de les eines principals per a la resolució de sistemes d'equacions polinòmiques.

Qualsevol conjunt de polinomis es pot transformar en una base de Gröbner. Aquest procés generalitza tres tècniques molt conegudes: *l'eliminació Gaussiana* per resoldre sistemes d'equacions lineals, *l'algoritme d'Euclides* per trobar el màxim comú divisor de dos polinomis en una variable i, *l'algoritme del Símplex* usat en problemes de programació lineal.

6.D.1 Preliminars

La teoria de les bases de Gröbner es desenvolupa al voltant del concepte dels ideals generats per conjunts finits de polinomis en diverses variables. Per tant, ens caldrà recordar alguns conceptes elementals previs. La gran majoria dels conceptes definits a continuació així com els resultats que presentem, estan extrets de [4].

Definició 3. *Sigui \mathbb{N} el conjunt dels enters positius. Sigui $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un vector de potències a \mathbb{N}^n , i siguin x_1, x_2, \dots, x_n , n variables qualssevol. Aleshores el monomi x^α format per aquestes variables x_1, x_2, \dots, x_n ve definit com el producte $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Més encara, el grau total del monomi x^α ve donat per $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.*

Exemple 2. *Els termes algebraics $x^5y^4z^2$ i x^8yz^7 són monomis en termes de x, y i z , amb graus totals 11 i 16 respectivament.*

Definició 4. *Un polinomi f en diverses variables x_1, x_2, \dots, x_n amb coeficients en un cos \mathbb{K} (sigui \mathbb{R} o \mathbb{C}) és una combinació lineal finita $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$, de monomis x^{α} i coeficients $a_{\alpha} \in \mathbb{K}$. El grau total del polinomi f ve definit pel màxim valor de $|\alpha|$ tal que $a_{\alpha} \neq 0$.*

Exemple 3. *$f(x, y, z) = x^3y^2z^5 + xyz - 3xy^3 + 5y^6z^3$ és un polinomi en les variables x, y i z , i el seu grau total és $|\alpha| = 10$ donat que aquest és el màxim dels graus totals*

dels monomis que el componen. Més concretament, el monomi $x^3y^2z^5$ ens aporta el grau d'aquest polinomi.

Observació 10. El conjunt de tots els polinomis en diverses variables x_1, x_2, \dots, x_n amb coeficients en un cos \mathbb{K} es denota per $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i, és fàcil comprovar que forma un anell commutatiu. L'anomenem l'anell de polinomis.

Definició 5. Sigui $\langle R, +, \cdot \rangle$ un anell commutatiu. Anomenem ideal I a un subconjunt $I \subset R$ no buit, tal que sigui tancat respecte la suma i respecte el producte d'un element de I amb un element de R .

Definició 6. Sigui $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ un conjunt de polinomis en diverses variables. Aleshores l'ideal generat per F i notat com $I = \langle F \rangle$, ve donat per :

$$\left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, \dots, h_s \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] \right\}.$$

Els polinomis f_1, \dots, f_s són una base de l'ideal generat. Del fet que F sigui un conjunt finit, diem que l'ideal és finitament generat.

Observació 11. El Teorema de les bases de Hilbert demostra que tot ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ és de la forma $I = \langle F \rangle$, és a dir que és generat per un conjunt finit F de polinomis. Òbviament, hi ha més d'una base per cada ideal, d'aquí la utilitat de les bases de Gröbner.

6.D.2 Relació d'ordre en els monomis

Tal i com veurem, un dels punts essencials en la teoria de les bases de Gröbner és la idea de la reducció dels polinomis, però abans d'introduir-la és necessari recordar certs aspectes sobre la relació d'ordre que es pot establir entre els monomis.

Considerem els polinomis en diverses variables x_1, x_2, \dots, x_n , amb coeficients en un cos \mathbb{K} . Assumim el següent ordre sobre les variables x_1, x_2, \dots, x_n :

$$x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n.$$

Observació 12. El resultat obtingut en el càlcul de les bases de Gröbner, varia substancialment segons la relació d'ordre escollida.

Definició 7. Un ordre total, $>$, sobre \mathbb{N}^n s'anomena admissible, si compleix les següents condicions:

- Per tot $\alpha \in \mathbb{N}^n$, es verifica $\alpha > 0$.

- Per tot $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$, si $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Fixem-nos que un ordre admissible com aquest, estableix una relació biunívoca entre \mathbb{N}^n i els monomis $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ a $\mathbb{K}[x]$. És a dir, si $>$ és un ordre admissible sobre \mathbb{N}^n , aleshores $>$ és un ordre sobre els monomis tal que si $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$.

Observació 13. Val a dir, que hi ha diversos tipus de relacions d'ordre entre els monomis, però nosaltres considerarem la lexicogràfica, la qual ordena els monomis segons l'ordre natural dels exponents seguint l'ordre alfabètic. Per exemple, $x^4y^3z^2 > x^3y^3z$.

Definició 8. Sigui $>$ un ordre admissible i $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un polinomi no nul. Aleshores definim:

- El grau màxim de f com: $\text{gmax}(f) = \max(\alpha \in \mathbb{N}^n : a_\alpha \neq 0)$.
- El monomi de major grau de f com: $\text{MM}(f) = x^{\text{gmax}(f)}$.
- El coeficient de major grau de f com: $\text{CM}(f) = a_{\text{gmax}(f)}$.
- El terme de major grau de f com: $\text{TM}(f) = \text{CM}(f) \cdot \text{MM}(f)$.

Exemple 4. Considerem una variació del polinomi donat a l'apartat anterior

$$f(x, y, z) = 6x^3y^2z^5 + 3xyz - 3xy^3 + 5y^6z^3,$$

definit a $\mathbb{K}[x, y, z]$. Si tenim en compte l'ordre lexicogràfic, l'expressió anterior s'escriu en ordre decreixent com

$$f(x, y, z) = 6x^3y^2z^5 - 3xy^3 + 3xyz + 5y^6z^3.$$

Aleshores, amb les definicions anteriors:

$$\text{gmax}(f) = |(3, 2, 5)| = 10, \text{MM}(f) = x^3y^2z^5, \text{CM}(f) = 6 \text{ i } \text{TM}(f) = 6x^3y^2z^5.$$

6.D.3 Reducció de polinomis

Tal i com hem dit abans, la reducció de polinomis és una de les peces principals en l'aplicació de l'algoritme per trobar les bases de Gröbner. Buchberger va veure la reducció de polinomis com el primer pas d'una divisió generalitzada.

Definició 9. Un polinomi g redueix cap a un altre h mòdul un conjunt de polinomis F , i ho notem com $g \rightarrow_F h$, si i només si, existeix $f \in F$, un escalar $b = \text{CM}(g)/\text{CM}(f)$, i $u = \text{MM}(g)/\text{MM}(f)$ tals que $h = g - buf$. En cas contrari, diem que g és irreductible mòdul F .

És a dir, g és irreductible mòdul F si cap monomi de grau màxim d'un element de F divideix al monomi de grau màxim de g . Per altra banda, si g és reductible mòdul F aleshores podem extreure d'ell un múltiple d'un element de F , eliminant el seu monomi de grau màxim i aconseguint un nou monomi més petit que el corresponent a g . Aquest nou polinomi és equivalent a g respecte l'ideal generat per F .

Exemple 5. *Sigui $F = \{f_1, f_2\}$, on $f_1 = xy^2 - x$ i $f_2 = x - y^3$. Considerem el polinomi $g = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$. Aquests polinomis estan ordenats respecte la relació d'ordre lexicogràfica. Si escollim $f = f_1$, $u = x^6$ i $b = 1$, obtenim el polinomi $h = g - buf = x^7 + x^3y^2 - y + 1$. Per tant $g \rightarrow_F h$.*

Fixem-nos que la definició de reducció de polinomis implica només el terme de grau màxim de g . Ara bé, també podem eliminar d'altres monomis de g que portin a combinacions lineals més petites. Per això necessitem les següents definicions:

Definició 10. *Un polinomi g és completament reductible respecte de F si cap terme de g és divisible per qualsevol terme de major grau de f_i , per tot $f_i \in F$.*

Tal i com podem veure, una manera de reduir un polinomi mòdul un conjunt de polinomis F és generalitzant l'algoritme de la divisió a $\mathbb{K}[x_1]$, el qual ens assegura que donats $f, g \in \mathbb{K}[x_1]$ i $g \neq 0$, sempre existeixen $q, r \in \mathbb{K}[x_1]$ únics, tals que $f = qg + r$ on, o bé $r = 0$, o bé $\text{grau}(r) < \text{grau}(g)$. Ara bé, en el nostre cas, ens interessa generalitzar aquest procediment al cas dels polinomis en diverses variables, concretament necessitem dividir un polinomi $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ per un conjunt de polinomis $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. A tals efectes, necessitarem el següent resultat, recollit i demostrat a [4].

Teorema L. *Sigui $F = (f_1, f_2, \dots, f_s)$ un conjunt ordenat de polinomis definits a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Aleshores si f és un polinomi a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, llavors existeixen $q_1, q_2, \dots, q_s, r \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tals que $f = q_1f_1 + q_2f_2 + \dots + q_sf_s + r$ on, o bé $r = 0$, o bé r és un polinomi completament reductible.*

Observem també, que qualsevol polinomi $p \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ (és a dir, un polinomi mòdul I) es pot expressar de manera única com una \mathbb{K} -combinació lineal de monomis estàndards $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Aquesta expressió és la *forma normal* de p . El procés per trobar-la és mitjançant l'algoritme de la divisió.

Finalment, i abans d'enunciar el que es coneix com a base de Gröbner, anem a definir una noció essencial per al desenvolupament d'aquesta teoria. Aquest concepte es coneix amb el nom de *S-polinomi*.

Definició 11. *Donats dos polinomis $f, g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, sigui J el monomi de grau màxim comú a f i g , obtingut agafant els termes de major grau de cadascuna de*

les variables que componen els monomis de major grau i multiplicant-los. Aleshores, definim el S -polinomi de f i g com la combinació lineal següent

$$(S - \text{pol})(f, g) = \frac{J}{\text{TM}(f)} \cdot f - \frac{J}{\text{TM}(g)} \cdot g,$$

Del fet que $J/\text{TM}(f)$ i $J/\text{TM}(g)$ siguin monomis, aleshores $(S - \text{pol})(f, g)$ és una combinació lineal amb coeficients polinòmics de f i g , i pertany al mateix ideal generat per f i g . L'anterior definició ens indica que els S -polinomis són el producte creuat dels termes de major grau i que són construïts per tal d'eliminar aquests termes de major grau (fixem-nos que els termes de major grau de les dues components del $(S - \text{pol})(f, g)$ són iguals i, per tant s'acaben cancel·lant).

Exemple 6. Sigui $F = \{f_1, f_2\}$, on $f_1 = xy^2z - xyz$ i $f_2 = x^2yz - z^2$. Aquests polinomis estan ordenats segons l'ordre lexicogràfic, de manera que $\text{MM}(f_1) = xy^2z$ i $\text{MM}(f_2) = x^2yz$. Així doncs $J = x^2y^2z$ (fixem-nos que comparem variable a variable, ens quedem amb la potència màxima, i obtenim J multiplicant les variables elevades a la màxima potència). Aleshores:

$$\begin{aligned} (S - \text{pol})(f, g) &= \frac{J}{\text{TM}(f_1)} \cdot f_1 - \frac{J}{\text{TM}(f_2)} \cdot f_2 \\ &= \frac{x^2y^2z}{xy^2z} \cdot f_1 - \frac{x^2y^2z}{x^2yz} \cdot f_2 = x \cdot f_1 - y \cdot f_2 = -x^2yz + yz^2. \end{aligned}$$

6.D.4 Bases de Gröbner

Les bases de Gröbner són molt útils a l'hora de resoldre sistemes d'equacions polinòmiques. Sigui $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ i F un conjunt finit de polinomis a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. La varietat de F és el conjunt de tots els zeros comuns:

$$V(F) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \text{ per tot } f \in F\},$$

i la varietat no canvia si substituïm F per qualsevol altre conjunt de polinomis que generi el mateix ideal a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. En particular, la base de Gröbner G deduïda de l'ideal $\langle F \rangle$ ens acaba donant la mateixa varietat:

$$V(F) = V(\langle F \rangle) = V(\langle G \rangle) = V(G).$$

L'avantatge de la base de Gröbner G , és que ens permet veure propietats geomètriques de la varietat que d'altra manera no serien visibles des de F .

Arribats en aquest punt, ja ens trobem en condicions de donar la definició relativa a les bases de Gröbner. La que transcriurem tot seguit és la que va donar originàriament Buchberger.

Definició 12. *Sigui un conjunt finit de polinomis F . Aleshores F és una base de Gröbner si i només si per tot g, h_1, h_2 , tals que h_1 i h_2 siguin formes normals de g mòdul F , es compleix que $h_1 = h_2$.*

Altrament, tenim el criteri següent que ens permetrà decidir si disposem o no d'una base de Gröbner.

Teorema M. *Sigui $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ un conjunt finit de polinomis. Sigui I l'ideal generat per F . Aleshores, els següents resultats són equivalents:*

- (a) *F és una base de Gröbner.*
- (b) *Per tot $f_i, f_j \in F : (S - \text{pol})(f_i, f_j)$ redueix a zero, mòdul F .*
- (c) *Qualsevol reducció d'un polinomi $f \in I$ a un altre polinomi reduït respecte F , sempre ens dona zero.*

Fixem-nos que aquest criteri és l'eix principal del que hi ha darrera el mètode per trobar les bases de Gröbner, atès que per veure si una base és o no de Gröbner, només cal calcular tots els $(S - \text{pol})(f_i, f_j)$ i mirar si redueixen a zero o no. Un altre resultat important que n'extraïem, és que ens dona les eines necessàries per construir una base de Gröbner. Si un *S-polinomi* no redueix a zero, encara es pot afegir a la base sense que canviï l'ideal generat. Això es deu al fet que és una combinació lineal de dos polinomis de la base. Un cop aquest *S-polinomi* estigui afegit a la base, reduirà a zero. No obstant això, hi haurà nous *S-polinomis* a ser considerats. Aquest procés finalitza tal i com va demostrar Buchberger i, aquest és el nucli principal del seu algoritme per a calcular les bases de Gröbner.

Bibliografia

- [1] S.S. Abhyankar, C.L. Bajaj. *Automatic parametrization of rational curves and surfaces III: Algebraic plane curves*, Computer Aided Geom. Des. 5 (1988), 309–321.
- [2] M. Abramowitz, I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, New York 1965.
- [3] G. Almkvist, B. Gert. *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π , and the Ladies diary*. Amer. Math. Monthly 95 (1988), 585–608.
- [4] I.A. Ajwa, Z. Liu, P.S. Wang. *Gröbner Bases Algorithm*, Technical Reports of the Institute for Computational Mathematics, ICM-199502-00 (versió del 2003) Kent State University 1995.
<http://icm.mcs.kent.edu/reports/1995/gb.pdf>. Consultat el 14 de desembre de 2016.
- [5] Ll. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. World Scientific, Singapore 1993.
- [6] J. Arndt, C. Haenel. *À la poursuite de Pi* , Vuibert, Paris 2006.
- [7] R. Bamon, I. Malta, M.J. Pacífico. *Changing rotation intervals of endomorphisms*, Invent. Math. 83 (1986), 257–264.
- [8] E. Barbeau, B. Gelbord, S. Tanny. *Periodicities of solutions of the generalized Lyness recursion*. J. Difference Equations Appl. 1 (1995), 291–306.
- [9] G. Bastien, V. Mañosa, M. Rogalski. *On periodic solutions of 2-periodic Lyness difference equations*. Int. J. Bifurcations and Chaos. 23 (2013), 1350071 (18 pages).
- [10] G. Bastien, M. Rogalski. *Global behavior of the solutions of Lyness' difference equation $u_{n+2}u_n = u_{n+1} + a$* . J. Difference Equations Appl. 10 (2004), 977–1003.

- [11] G. Bastien, M. Rogalski. *On some algebraic difference equations $u_{n+2}u_n = \psi(u_{n+1})$ in \mathbb{R}^+ , related to families of conics or cubics: generalization of the Lyness' sequences*, J. Math. Anal. Appl. 300 (2004), 303–333.
- [12] G. Bastien, M. Rogalski. *On the algebraic difference equations $u_{n+2} + u_n = \psi(u_{n+1})$ in \mathbb{R} , related to a family of elliptic quartics in the plane*, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), 822–844.
- [13] G. Bastien, M. Rogalski. *Periods of the solutions of a difference equation in \mathbb{R}_*^+ associated to a special QRT-map.*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. A 20 (2013), 727–745.
- [14] F. Beukers, R. Cushman. *Zeeman's monotonicity conjecture*, J. Differential Equations 143 (1998), 191–200.
- [15] J. Blanc, J. Déserti. *Degree growth of birational maps of the plane*. ar-Xiv:1109.6810
- [16] G. Boros, V.H. Moll. *A rational Landen transformation. The case of degree six*, in M. Knopp et al. eds, Analysis, Geometry, Number Theory: The Mathematics of Leon Ehrenpreis, Contemporary Mathematics 251. AMS, Providence RI 2000, 83–91.
- [17] G. Boros, V.H. Moll. *Landen transformations and the integration of rational functions*, Mathematics of Computation 71 (2001), 649–668.
- [18] J.M. Borwein, P.B. Borwein. *Pi and the AGM. A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. A Wiley-Interscience Publication, New York 1987.
- [19] P.F. Byrd, M.D. Friedman. *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. Springer-Verlag, Berlin 1954.
- [20] A. Cañada, S. Villegas. *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 7 (2004), 101–121.
- [21] B.C. Carlson. *Algorithms involving arithmetic and geometric means*, American Mathematical Monthly 78 (1971), 496–505.
- [22] J.W.S. Cassels. *Lectures on elliptic Curves*. Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [23] M. Chamberland, V.H. Moll. *Dynamics of the degree six Landen transformation*, Discrete and Continuous Dynamical Systems A 15 (2006), 905–919.

-
- [24] J.A. Cid. *Grado topológico y ecuaciones diferenciales*, Conferència donada el 18 de febrer de 2010 a Santiago de Compostela.
<http://angelcid.webs.uvigo.es/Archivos/Papers/Degree.article.pdf>.
Consultat el 2 de maig de 2017.
- [25] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Dynamics of rational discrete dynamical systems via first integrals*, Int. J. Bifurcations and Chaos. 16 (2006), 631–645.
- [26] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Dynamics of the third order Lyness' difference equation*. J. Difference Equ. Appl. 13 (2007), 855–884.
- [27] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Studying discrete dynamical systems through differential equations*. J. Differential Equations 244 (2008), 630–648.
- [28] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *On 2- and 3- periodic Lyness difference equations*. J. Difference Equations and Applications. 18, 5 (2012), 849–864.
- [29] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Non-autonomous 2-periodic Gumovski-Mira difference equations*. Int. J. Bifurcations and Chaos. 22 (2012), 1250264 (14 pages).
- [30] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Integrability and non-integrability of periodic non-autonomous Lyness recurrences*. Dynamical Systems 28, 4 (2013) 518–538.
- [31] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa. *Non-integrability of measure preserving maps via Lie symmetries*. J. Differential Equations 259 (2015), 5115–5136.
- [32] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa, F. Mañosas. *Different approaches to the global periodicity problem*. In: Discrete dynamical systems and applications. Ll.Alseda et al. eds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Volume 180, Springer, Berlin 2016. pp. 85–106.
- [33] A. Cima, F. Mañosas. *Real dynamics of integrable birational maps*. Qual. Theory Dyn. Syst. 10 (2011), 247–275.
- [34] A. Cima, S. Zafar. *Integrability and algebraic entropy of k -periodic non-autonomous Lyness recurrences*. J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 20–34.
- [35] C.A. Clark, E.J. Janowski, M.R.S. Kulenović. *Stability of the Gumowski-Mira equation with period-two coefficient*. J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), 292–304.
- [36] D.A. Cox. *The Arithmetic-Geometric mean of Gauss*, L'Enseignement Mathématique 30 (1984), 275–330.
- [37] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin 1985.

- [38] R. Devaney. An Introduction to chaotic dynamical systems. Westview, Boulder CO 2003.
- [39] J. Diller. *Dynamics of birational maps of P^2* . Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 721–772.
- [40] J. Diller, C. Favre. *Dynamics of Bimeromorphic Maps of Surfaces* Amer. J. Math. 123 (2001), 1135–1169
- [41] J.J. Duistermaat. Discrete Integrable Systems: QRT Maps and Elliptic Surfaces. Springer, New York 2010.
- [42] P. Eymard, J.P. Lafon. The number Pi . American Mathematical Society, Providence RI 2004.
- [43] I. Gálvez, V. Mañosa. *Periodic orbits of planar integrable birational maps*. In: Nonlinear Maps and their Applications, R.López-Ruíz et al. eds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Chapter 2 , Volume 112, Berlin 2015, pp 13-36.
- [44] J. García-Saldaña, A. Gasull, H. Giacomini. *Bifurcation values for a family of planar vector fields of degree five*. Discrete and Continuous Dynamical Systems A 35 (2015), 669–701.
- [45] J. García-Saldaña, A. Gasull, H. Giacomini. *Bifurcation diagram and stability for a one-parameter family of planar vector fields*. J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), 321–342.
- [46] A. Gasull, M. Llorens. *Càlcul d'integrals usant sistemes dinàmics discrets*. Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 32 (2017) 45–71.
- [47] A. Gasull, M. Llorens, V. Mañosa. *Continua of periodic points for planar integrable rational maps*. Int. J. Difference Equations, 11 (2016), 37–63.
- [48] A. Gasull, V. Mañosa, X. Xarles. *Rational Periodic Sequences for the Lyness Equation*. Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 32 (2012), 587–604.
- [49] C.F. Gauss. *Le journal mathématique de Gauss*, translated and annotated by P.Eymard and J.P.Lafon, Rev. Histoire Sci. 9 (1956), 21–51.
- [50] C.F. Gauss. *Arithmetisch geometrisches Mittel*, Werke, Bd. 3 Königlichen Gesell. Wiss., Göttingen 1876, pp. 361–403.
- [51] J. Guckenheimer, P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, Berlin 1997.

-
- [52] I. Gumovski, Ch. Mira. Recurrences and discrete dynamic systems. Lecture Notes in Mathematics 809. Springer, Berlin 1980.
- [53] F. Haggar, G.B. Byrnes, G.R.W. Quispel, H. W. Capel. *k-integrals and k-Lie symmetries in discrete dynamical systems*. Physica A 233 (1996), 379–394.
- [54] M. van Hoeij. *Rational parametrizations of algebraic curves using a canonical divisor*, J. Symb. Comput. 23 (1997), 209–227.
- [55] D. Jogia, J.A.G. Roberts, F. Vivaldi. *An algebraic geometric approach to integrable maps of the plane*, J. Physics A: Math. & Gen. 39 (2006), 1133–1149.
- [56] F. Kirwan. *Complex Algebraic Curves*, London Mathematical Society Student Texts 23 (1995), 85–110.
- [57] M.R.S. Kulenović, Z. Nurkanović. *Stability of Lyness' equations with period-two coefficient via KAM theory*. J. Concr. Appl. Math. 6 (2008) 229–245.
- [58] W. Kulpa. *The Poincaré-Miranda Theorem*, Amer. Math. Month. 104 (1997), 545–550.
- [59] A.G. Kurosh. Curso de álgebra superior. Mir, Moscou 1977.
- [60] J. Landen. *An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom*. Philos. Trans. Royal Soc. London 65 (1775), 283–289.
- [61] M. Llorens, V. Mañosa. *Lie symmetries of birational maps preserving genus 0 fibrations*. J. Math. Anal. Appl. 432 (2015), 531–549.
- [62] E.M. McMillan. *A problem in the stability of periodic systems*. In W.E. Britton H. Odabasi (editors). Topics in modern physics. A tribute to E. U. Condon. Colorado University Press, Boulder CO 1971. pp. 219–244.
- [63] D. Manna, V.H. Moll. *A simple example of a new class of Landen transformations*. Amer. Math. Monthly 114 (2007), 232–241.
- [64] D. Manna, V.H. Moll. *Landen survey. Probability, geometry and integrable systems*, 287–319, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 55, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2008.
- [65] H. McKean, V. Moll. *Elliptic Curves. Function Theory, Geometry, Arithmetic*. Cambridge University Press, Cambridge 1997.

- [66] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, Charlottesville 1965.
- [67] C. Miranda. *Una osservazione su una teorema di Brouwer*, Boll. Unione Mat. Ital. 3 (1940), 527–527.
- [68] M. Misiurewicz. *Persistent rotation intervals for old maps*. In: Dynamical systems and ergodic theory, 119–124. Banach Center Publ. 23, Warsaw 1989.
- [69] V.H. Moll. *The evaluation of integrals: A personal history*. Notices of the AMS 49 (2002), 311–317.
- [70] V.H. Moll. *Integrales definidas. Análisis, números y experimentos*. Curso organizado por la Universidad Católica de Valparaíso, Chile, Octubre 2006, 46 páginas.
- [71] V.H. Moll. *Numbers and functions. From a classical-experimental mathematician's point of view*. Student Mathematical Library, 65. American Mathematical Society, Providence RI 2012.
- [72] D. Montgomery. *Pointwise periodic homeomorphisms*. Amer. J. Math. 59 (1937), 118–120.
- [73] D.J. Newman. *A simplified version of the Fast Algorithms of Brent and Salamin*, Mathematics of Computation 44 (1985), 207–210.
- [74] R. Ortega. *Degree theory and boundary value problems*, curs de doctorat, Trieste, 2006.
<http://www.ugr.es/~rortega/PDFs/degree.pdf>. Consultat l'1 de desembre de 2016.
- [75] F.J. Palladino. *On invariants and Forbidden sets*. arXiv:1203.2170v2
- [76] C. Pita. *Cálculo vectorial*. Prentice Hall, México 1995.
- [77] J. Pla. *Una història breu de la matemàtica*, Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques 18 (2003), 47–129.
- [78] H. Poincaré. *Sur certaines solutions particulieres du problème des trois corps*, C. R. Acad. Sci. Paris 97 (1883), 251–252.
- [79] H. Poincaré. *Sur certaines solutions particulieres du problème des trois corps*, Bull. Astronomique 1 (1884), 63–74.

-
- [80] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par une équation différentielle IV*, J. Math. Pures Appl. 85 (1886), 151–217.
 - [81] B. Rúbio Segovia, J. Rúbio Segovia. *Medias y su relación con integrales elípticas*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 4 (2001), 76–93.
 - [82] S. Saito, N. Saitoh. *On recurrence equations associated with invariant varieties of periodic points*. J. Physics A: Math. & Gen. 40 (2007), 12775–12787.
 - [83] J.F. Sánchez. *El Teorema de Bolzano y sistemas de ecuaciones*. Treball de fi de grau, Facultat de Matemàtiques, Universitat de Granada, Granada 2016.
 - [84] J.R. Sendra, F. Winkler, S. Pérez-Díaz. *Rational Algebraic Curves*. Springer, New York 2008.
 - [85] J. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Springer, New York 1994.
 - [86] J. Silverman, J. Tate. *Rational points on elliptic curves*. Springer, New York 1992.
 - [87] J. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*. Springer, New York 2009.
 - [88] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer, New York 2002.
 - [89] B. Sturmfels. *What is... a Gröbner Basis?*, Notices of the AMS 52 (2005), 1199–1200.
 - [90] M.N. Vrahatis. *A short proof and a Generalization of Miranda's existence Theorem*, Proc. AMS 107 (1989), 701–703.
 - [91] H.S. Wilf. *generatingfunctionology*, Academic Press, Boston MA 1990.
 - [92] E.C. Zeeman. *Geometric unfolding of a difference equation*, Preprint Hertford College, Oxford, Unpublished, (1996).